Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **3** Hal. 36 – 42
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

KESIMILARAN SEMU PADA MATRIKS *FUZZY*

DUHAIFA ANESSA, NOVA NOLIZA BAKAR, MONIKA RIANTI HELMI
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email: duhaifa.anessa@gmail.com

Abstrak. Matriks *fuzzy* adalah matriks yang entri-entrinya berada pada selang tutup $[0, 1]$. Pada tulisan ini akan membahas tentang sifat-sifat yang bersesuaian dengan kesi milaran semu pada matriks *fuzzy* A dan B. Selanjutnya, diperoleh sifat-sifat yang ber sesuaian dengan kesimilaran semu pada matriks *fuzzy* A dan B yaitu misalkan A dan B adalah matriks *fuzzy* masing-masing berukuran $m \times m$ dan $n \times n$ sedemikian sehingga A similar B, maka (1) A adalah matriks regular jika dan hanya jika B adalah matriks regular. (2) A adalah idempoten jika dan hanya jika B adalah idempoten.

Kata Kunci: Matriks *fuzzy*, kesimilaran semu, similar, matriks regular, idempoten

Diterima	:	*26 Juli 2018*
Direvisi	:	*17 September 2018*
Dipublikasikan	:	*21 Desember 2018*

1. Pendahuluan

Matriks *fuzzy* didefinisikan pertama kali oleh Thomson pada tahun 1977 [3], kemudian teori dari matriks *fuzzy* dikembangkan oleh Kim dan Roush dan dilanjutkan dengan komposisi max-min matriks Boolean [2]. Operasi-operasi pada matriks *fuzzy* menggunakan operasi max-min dan berbeda dengan operasi matriks atas bilangan real dan kompleks.

Pada matriks *fuzzy* terdapat konsep generalisasi invers (g-invers). Generalisasi invers (g-invers)merupakan perluasan dari konsep invers matriks yang dideskripsikan oleh E.H Moore pada tahun 1920. Kemudian pada tahun 1955 Roger Penrose berhasil mendeskripsikan empat persamaan yang harus dipenuhi untuk menentukan g-invers [1]. Persamaan tersebut dikenal dengan nama persamaan Penrose. Tulisan ini akan menjelaskan definisi dan sifat-sifat yang bersesuaian dengan kesimilaran semu pada matriks *fuzzy* A dan B.

2. Landasan Teori

Pada bagian ini akan dijelaskan operasi penjumlahan dan perkalian pada aljabar dan karakteristik yang terkait dengan operasi penjumlahan dan perkalian *fuzzy*.

Definisi 2.1. *[6] Misalkan $a, b \in F$ dimana $F = [0, 1]$ maka operasi penjumlahan dan perkalian pada a, b didefinisikan sebagai berikut,*

$$a + b = \max\{a, b\}, \qquad a \cdot b = min\{a, b\}.$$

Definisi 2.2. *[4] Aljabar fuzzy adalah sistem matematika $(F, +, \cdot)$ dengan operasi $+$ dan $\cdot$ yang didefinisikan pada himpunan F, dimana untuk setiap $a, b, c \in F$ berlaku:*

(1) $a + a = a$ *dan* $a \cdot a = a$,
(2) $a + b = b + a$ *dan* $a \cdot b = b \cdot a$,
(3) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *dan* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
(4) $a + (a \cdot b) = a$ *dan* $a \cdot (a + b) = a$,
(5) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *dan* $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$,
(6) terdapat $0 \in F$ *sehingga* $a + 0 = a$ *dan* $a \cdot 0 = 0$,
(7) terdapat $1 \in F$ *sehingga* $a + 1 = 1$ *dan* $a \cdot 1 = a$.

Selanjutnya, akan dijelaskan definisi dari matriks *fuzzy* dan sifat-sifat yang digunakan.

Definisi 2.3. *[4] Matriks* $A = [a_{i,j}]$ *dikatakan matriks fuzzy jika* $a_{ij} \in [0, 1]$.

Definisi 2.4. *[4] Misalkan* F_{mn} *menunjukkan himpunan semua matriks fuzzy berukuran* $m \times n$. *Jika* $m = n$, *maka dapat ditulis dengan* F_n.

Definisi 2.5. *[4] Misalkan* $A = [a_{ij}]$ *dan* $B = [b_{ij}]$ *adalah matriks-matriks fuzzy berukuran* $m \times n$, *maka penjumlahan dari* A, B *didefinisikan sebagai berikut,*

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij} + b_{ij}] \\ &= [\max\{a_{ij}, b_{ij}\}]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definisi 2.6. *[4] Misalkan* $A = [a_{ik}]$ *adalah matriks fuzzy berukuran* $m \times p$ *dan* $B = [b_{kj}]$ *adalah matriks fuzzy berukuran* $p \times n$, *maka perkalian dari* A, B *didefinisikan sebagai berikut,*

$$\begin{aligned} AB &= [a_{ik} \cdot b_{kj}] \\ &= \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}, b_{kj}\right] \\ &= [\max_{k}\{\min\{a_{ik}, b_{kj}\}\}]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Definisi 2.7. *[4] Misalkan* $A = [a_{ij}]$ *adalah matriks fuzzy berukuran* $m \times n$, $k \in [0, 1]$ *dan* $[0, 1]$ *adalah aljabar fuzzy, maka perkalian dari* k, A *didefinisikan sebagai berikut,*

$$\begin{aligned} k \cdot A &= [k \cdot a_{ij}] \\ &= [\min\{k, a_{ij}\}]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Definisi 2.8. *[4] Misalkan* $A = [a_{ij}]$ *dan* $B = [b_{ij}]$ *adalah matriks-matriks fuzzy berukuran* $m \times n$. *Dikatakan* $A \leq B$ *apabila* $a_{ij} \leq b_{ij}$ *untuk setiap* i, j.

Proposisi 2.9. *[4] Misalkan* $A, B, C \in F$ *dengan ukuran masing-masing* $m \times n, n \times p$ *dan* $p \times q$, *maka berlaku:*

$$(AB)C = A(BC).$$

Bagian ini akan menjelaskan pengertian dari idempoten dan matriks regular.

Definisi 2.10. *[6] Suatu Matriks fuzzy A berukuran $n \times n$ adalah idempoten jika dan hanya jika $A^2 = A$.*

Definisi 2.11. *[4] Misalkan A^- adalah suatu g-invers dari A, matriks A adalah regular jika memenuhi $AA^-A = A$.*

3. Pembahasan

3.1. *Kesimilaran Semu Pada Matriks Fuzzy*

Definisi 3.1. *[4] Matriks $A \in F_m$ dan $B \in F_n$ disebut sebagai kesimilaran semu, dinotasikan oleh $A \simeq B$, jika terdapat suatu matriks $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $X = XYX$.*

Lema 3.2. *[4] Misalkan $A \in F_m$ dan $B \in F_n$, maka pernyataan berikut ekivalen:*

(i) $A \simeq B$.
(ii) *Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $XY \in F_m$ adalah idempoten.*
(iii) *Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $YX \in F_n$ adalah idempoten.*

Bukti.

(i) $\Rightarrow$ (ii) dan (i) $\Rightarrow$ (iii) trivial, karena $X = XYX$ maka $XY \in F_m$ dan $YX \in F_n$ adalah idempoten.
(ii) $\Rightarrow$ (i) $A = XBY = (XY)A(XY) = (XYX)B(YXY)$, dengan cara yang sama $B = YAX = (YX)B(YX) = (YXY)B(XYX)$, misal $X' = XYX$ $Y' = YXY$, maka diperoleh: $A = X'BY'$ dan $B = Y'AX'$. Selanjutnya, dengan menggunakan XY adalah idempoten maka $X'Y' = (XYX)(YXY) = (XY)^2(XY) = XY$ $(X'Y')(X'Y') = (XY)(XY) = XY = X'Y'$ sehingga diperoleh $X'Y'$ adalah idempoten. $A = X'BY' = X'(Y'AX')Y' = (X'Y'X')B(Y'X'Y')$ dengan cara yang sama $B = Y'AX' = (Y'X'Y')A(X'Y'X')$ misalkan $X'' = X'Y'X'$ dan $Y'' = Y'X'Y'$. Diperoleh $A = X''BY''$ dan $B = Y''AX''$. Karena $X'Y'$ adalah idempoten, diperoleh $X''Y''X'' = (X'Y'X')(Y'X'Y')(X'Y'X') = X'Y'X' = X''$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Dapat dibuktikan dengan cara yang sama dengan di atas. □

Teorema 3.3. *[4] Misalkan $A \in F_m$ dan $B \in F_n$, maka pernyataan berikut ekivalen:*

(i) $A \simeq B$.
(ii) *Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $(XY)^k \in F_m$ adalah idempoten untuk suatu bilangan ganjil $k \in N$.*
(iii) *Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$ $B = YAX$, dan $(YX)^k \in F_n$ adalah idempoten untuk suatu bilangan ganjil $k \in N$.*

Bukti.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ikuti berdasarkan Lema 3.2.
(ii) $\Rightarrow$ (i) $A = XBY = X(YAX)Y = (XY)(XBY)(XY) = (XY)^2(XBY)(XY)^2$, hingga dengan cara yang sama diperoleh $A = (XY)^r(XBY)(XY)^r$ dan $B = YAX = Y(XBY)X = (YX)(YAX)(YX) = Y(XY)^2A(XY)^2X$. Dengan cara yang sama diperoleh $B = Y(XY)^rA(XY)^rX$. Misalkan $X' = (XY)^rX$ dan $Y' = Y(XY)^r$ maka diperoleh $A = (XY)^r(XBY)(XY)^r = X'BY'$ dan $B = Y(XY)^rA(XY)^rY = Y'AX'$, misalkan $k = 2r + 1$ dengan $r \in N$ diperoleh $X'Y' = [(XY)^rX][Y(XY)^r] = (XY)^{2r+1} = (XY)^k$ idempoten. Berdasarkan Lema 3.2 maka $A \simeq B$ terbukti.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Ikuti berdasarkan Lema 3.2.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Dapat dibuktikan dengan cara yang sama dengan di atas. □

Akibat 3.4. *[4] Misalkan $A \in F_m$ dan $B \in F_n$, maka pernyataan berikut ekivalen.*

(i) $A \simeq B$.
(ii) *Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $[(XY)^k = XY] \in F_m$ untuk suatu $k \in N$ bilangan genap.*
(iii) *Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $[(YX)^k = YX] \in F_n$ untuk suatu $k \in N$ bilangan genap.*

Bukti.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ikuti berdasarkan Teorema 3.3.
(ii) $\Rightarrow$ (i) $(XY)^k = XY$ untuk suatu $k \in N$ bilangan genap. Misal $k = 2l$ untuk suatu $l \in N$, maka $(XY)^{2l} = XY$, karena $(XY)^{2l} = (XY)^{2l-1}(XY)$ sehingga $(XY)^{2l-1}(XY) = XY$. Selanjutnya $(XY)^{2l-1}(XY)^{2l-1} = (XY)^{2l-1}(XY)(XY)^{2(l-1)} = (XY)(XY)^{2(l-1)} = (XY)^{2l-1}$. Jadi karena $(XY)^{2l-1}$ adalah idempoten berdasarkan Teorema 3.3, maka $A \simeq B$ terbukti.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Dapat dibuktikan dengan cara yang sama dengan di atas. □

Lema 3.5. *[4] Misalkan $A \in F_m$ dan $B \in F_n$, maka pernyataan berikut ekivalen.*

(i) $A \simeq B$.
(ii) *Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, $X = XYX$ dan $Y = YXY$.*
(iii) *Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y, Z \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = ZAX$, dan $X = XYX = XZX$.*

Bukti.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Karena $A \simeq B$, artinya terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $X = XYX$. Pilih $Z \in F_{nm}$ dengan $Z = Y$, akibatnya $A = XBY$, $B = ZAX$ dan $X = XZX$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) $A = XBY = X(ZAX)Y = (XZ)A(XY) = XB(YXY)$ dan $B = ZAX = Z(XBY)X = (ZX)B(YX) = (ZXZ)AX$. Selanjutnya $X =$

$XYX = (XYX)Y(XYX) = X(YXY)X$ dan dengan cara yang sama diperoleh $X = XZX = X(ZXZ)(XZX) = X(ZXZ)X$.
Misalkan $Y' = YXY$ dan $Z' = ZXZ$, maka diperoleh $X = XY'X$ dan $X = XZ'X$. Akibatnya $A = XBY'$ dan $B = Z'AX$.
Selanjutnya misalkan $Y'' = Z'XY'$, maka $XY''X = X(Z'XY')X = XZ'(XY'X) = XZ'X = X$ dan $Y''XY'' = (Z'XY')X(Z'XY') = (Z'XY')(XZ'X)Y' = (Z'XY')XY' = Z'XY' = Y''$. Selanjutnya, $XBY'' = XB(Z'XY') = X(Z'AX)(Z'XY') = XZ'A(XZ'X)Y' = X(Z'AX)Y' = XBY' = A$ dan $Y''AX = (Z'XY')AX = (Z'XY')(XBY')X = Z'(XY'X)BY'X = Z'(XBY')X = Z'AX = B$.
Jadi, karena terdapat $X \in F_{mn}$, $Y'' \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY''$, $B = Y''AX$, $X = XY''X$, dan $Y'' = Y''XY''$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Jelas bahwa semua yang ada pada (ii) memenuhi (i) sehingga ini trivial. □

Teorema 3.6. *[4] Misalkan matriks $A \in F_m$ dan $B \in F_n$ sedemikian sehingga $A \simeq B$, maka A adalah matriks regular jika dan hanya jika B adalah matriks regular.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Misal A adalah matriks regular maka berdasarkan Definisi 2.11 terdapat $G \in F_m$ sedemikian sehingga $AGA = A$. Akan ditunjukkan B adalah matriks regular, dengan menunjukkan $BUB = B$ untuk $U \in F_n$.
Karena $A \simeq B$, maka berdasarkan Lema 3.2 diperoleh $A = XBY = XB(YXY) = (XBY)XY = AXY$ dan $A = XBY = (XYX)BY = XY(XBY) = XYA$. Misalkan $U = YGX$ maka

$$BUB = (YAX)(YGX)(YAX) = (AXY)G(XYA)X = YAGAX = Y(AGA)X = YAX = B.$$

Sehingga B adalah matriks regular.
($\Leftarrow$) Dapat dibuktikan dengan cara yang sama dengan di atas. □

Teorema 3.7. *[4] Misalkan matriks $A \in F_m$ dan $B \in F_n$ sedemikian sehingga $A \simeq B$. Maka A adalah idempoten jika dan hanya jika B adalah idempoten.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Misal A adalah idempoten berarti $A^2 = A$. Akibatnya,

$$B^2 = BB = (YAX)(YAX) = Y(AXY)AX = YAAX = YA^2X = YAX = B.$$

Sehingga $B^2 = B$ adalah idempoten.
($\Leftarrow$) Dapat dibuktikan dengan cara yang sama dengan di atas. □

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam tugas akhir ini, diperoleh sifat-sifat yang bersesuaian dengan kesimilaran semu pada matriks *fuzzy* A dan B, yaitu sebagai berikut

(1) Misalkan $A \in F_m$ dan $B \in F_n$, maka pernyataan berikut ekivalen:

(i) $A \simeq B$.
(ii) Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $XY \in F_m$ adalah idempoten.
(iii) Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $YX \in F_n$ adalah idempoten.

(2) Misalkan $A \in F_m$ dan $B \in F_n$, maka pernyataan berikut ekivalen:
(i) $A \simeq B$.
(ii) Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $(XY)^k \in F_m$ adalah idempoten untuk suatu bilangan ganjil $k \in N$.
(iii) Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$ $B = YAX$, dan $(YX)^k \in F_n$ adalah idempoten untuk suatu bilangan ganjil $k \in N$.

(3) Misalkan $A \in F_m$ dan $B \in F_n$, maka pernyataan berikut ekivalen:
(i) $A \simeq B$.
(ii) Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $[(XY)^k = XY] \in F_m$ untuk suatu $k \in N$ bilangan genap.
(iii) Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, dan $[(YX)^k = YX] \in F_n$ untuk suatu $k \in N$ bilangan genap.

(4) Misalkan $A \in F_m$ dan $B \in F_n$, maka pernyataan berikut ini ekivalen :
(i) $A \simeq B$.
(ii) Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = YAX$, $X = XYX$ dan $Y = YXY$.
(iii) Terdapat $X \in F_{mn}$ dan $Y \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $A = XBY$, $B = ZAX$, dan $X = XYX = XZX$.

(5) Misalkan matriks $A \in F_m$ dan $B \in F_n$ sedemikian sehingga $A \simeq B$. Maka A adalah matriks regular jika dan hanya jika B adalah matriks regular.
(6) Misalkan matriks $A \in F_m$ dan $B \in F_n$ sedemikian sehingga $A \simeq B$. Maka A adalah idempoten jika dan hanya jika B adalah idempoten.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada ibu Hazmira Yozza, bapak I Made Arnawa, dan bapak Narwen yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Ben-Israel, A and T.N.E Greville. 2003. *Generalized Inverses Theory And Applications*; Second Edition. Springer-Verlag New York, Inc, USA
[2] Kim, K.H and Roush, F.W. 1980. Generalized Fuzzy Matrices, *Fuzzy Sets and Systems* 4:293-315
[3] M.G. Thomson. 1977. Convergence of Power of A Fuzzy Matrix, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 57:476-480

[4] Meenakshi, A.R. 2008. *Fuzzy Matrix Theory and Applications*, MJP Publishers, India
[5] Meenakshi, A.R and Gandhimathi, T. 2015. Pseudo Similar Intuitionistic *Fuzzy* Matrices. *Applied and Computational Mathematics. International Journal of Mathematics*, 4:1-2
[6] Sidky, F.I and E.G. Enam. 1992. Some Remarks on Section of a Fuzzy Matrix, *Journal of King Abdulaziz University Sci* 4:145-155