RAINBOW CONNECTION NUMBER PADA GRAF $(3K_6 * W_6, v)$

FADILLAH, LYRA YULIANTI, SYAFRIZAL SY

*Program Studi S1 Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 email: dillafadillah08021995@gmail.com*

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung tak trivial. Definisikan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, dimana sisi yang bertetangga boleh diberi warna yang sama. Misalkan terdapat titik u dan v di G . Suatu lintasan- (u, v) di G dikatakan sebagai lintasan *rainbow* (*rainbow path*) jika semua sisi dalam lintasan- (u, v) tersebut memiliki warna yang berbeda. Graf G dikatakan bersifat *rainbow connected* terhadap pewarnaan c jika G memuat lintasan *rainbow* untuk setiap dua titik u dan v di G , sementara c dikatakan sebagai pewarnaan *rainbow* (*rainbow coloring*) dari G . Jika terdapat k warna yang digunakan dalam pewarnaan tersebut maka c dinamakan pewarnaan- k *rainbow* (*rainbow k-coloring*). Bilangan *rainbow connection* (*rainbow connection number*) dari graf terhubung G , dinotasikan dengan $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected*. Pada makalah ini akan ditentukan nilai bilangan *rainbow connection* dari graf yang merupakan hasil amalgamasi tiga graf lengkap, masing-masingnya dengan enam titik, $3K_6$, dengan graf roda W_6 , dinotasikan dengan graf $(3K_6 * W_6, v)$.

Kata Kunci: Graf $(3K_6 * W_6, v)$, rainbow path, rainbow connection number

Diterima : 6 Juli 2018
 Direvisi : 15 September 2018
 Dipublikasikan : 21 Desember 2018

1. Pendahuluan

Salah satu topik dalam teori graf adalah *rainbow connection* pada graf. Konsep *rainbow connection number* pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, dkk pada tahun 2006 [1]. Misalkan G adalah graf terhubung tak *trivial* dan didefinisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, dengan $k \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga dua sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu lintasan- (u, v) adalah lintasan dari titik u ke titik v . Lintasan- (u, v) dikatakan lintasan *rainbow* jika setiap sisi dalam lintasan tersebut diberikan warna yang berbeda. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh suatu lintasan *rainbow*. Dalam hal ini, pewarnaan c dikatakan sebagai suatu pewarnaan *rainbow* dari G . Banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected* disebut dengan bilangan *rainbow connection* dari G , yang dinotasikan dengan $rc(G)$.

Selanjutnya, suatu lintasan- (u, v) dikatakan lintasan *geodesic* jika panjang lintasan tersebut adalah $d(u, v)$, yaitu jarak antara u ke v di G . Suatu lintasan geodesic

dikatakan *rainbow* jika setiap sisi dalam lintasan tersebut diberikan warna yang berbeda. Graf G dikatakan *strong rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh suatu lintasan *rainbow* yang bersifat geodesic. Dalam hal ini, pewarnaan c dikatakan sebagai suatu pewarnaan *strong rainbow* dari G . Banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *strong rainbow connected* disebut dengan bilangan *strong rainbow connection* dari G , yang dinotasikan dengan $src(G)$.

Amalgamasi merupakan penggabungan satu titik dari masing-masing graf menjadi sebuah titik baru yang disebut dengan terminal. Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi amalgamasi adalah $*$. Fitriani D. dan ANM Salman. [2] melakukan penelitian terkait *rainbow connection number* dari amalgamasi beberapa graf yang isomorfik. Dalam makalah ini akan dibahas tentang *rainbow connection number* dari amalgamasi sebanyak empat graf yang tidak semuanya isomorfik, yaitu tiga graf lengkap K_6 dan satu graf roda W_6 .

2. Tinjauan Teori

Misalkan terdapat suatu graf terhubung tak trivial G . Diameter dari G , dinotasikan $diam(G)$, adalah nilai terbesar dari jarak antara setiap dua titik di G , atau dapat dituliskan $diam(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$.

Berikut adalah dua hasil fundamental terkait bilangan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* dari suatu graf terhubung G dengan banyak sisi m .

Teorema 2.1. [1] Jika G adalah graf terhubung tak trivial berukuran m yang mempunyai diameter $diam(G)$, maka

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

Teorema 2.2. [1] Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial dengan banyak sisi m , maka

- (a) $rc(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap,
- (b) $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$,
- (c) $rc(G) = m$ jika dan hanya jika G adalah graf pohon.

3. Rainbow Connection Number pada Graf $(3K_6 * W_6, v)$

Graf $G \simeq (3K_6 * W_6, v)$ merupakan graf hasil amalgamasi tiga graf lengkap K_6 dan satu graf roda W_6 yang diperoleh dari mengamalgamasikan satu titik sebarang pada setiap graf lengkap K_6 dengan titik u_6 yang terdapat pada lingkaran graf roda W_6 .

Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf lengkap K_6 ke- i adalah

$$\begin{aligned} V(K_6)_i &= \{v_{ij} | 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 6\}, \\ E(K_6)_i &= \{v_{ij}v_{ik} | 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j, k \leq 6, j \neq k\}. \end{aligned}$$

Sementara himpunan titik dan himpunan sisi dari graf W_6 adalah

$$\begin{aligned} V(W_6) &= \{u_0\} \cup \{u_j | 1 \leq j \leq 6\}, \\ E(W_6) &= \{u_0u_j | 1 \leq j \leq 6\} \cup \{u_ku_{k+1} | 1 \leq k \leq 5\} \cup \{u_1u_6\}. \end{aligned}$$

Graf $G \simeq (3K_6 * W_6, v)$ diamalgamasikan dengan cara mengidentifikasi titik $v_{i6}, 1 \leq i \leq 3$ dengan titik u_6 . Titik hasil identifikasi dinotasikan sebagai titik v .

Pada Teorema 3.1 berikut diperoleh bilangan *rainbow connection* dari graf $G \simeq (3K_6 * W_6, v)$.

Teorema 3.1. *Misalkan terdapat graf $G \cong (3K_6 * W_6, v)$. Maka*

$$rc(G) = 4.$$

Bukti. Dapat dilihat bahwa $diam(G) = 3$. Sehingga berdasarkan Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(G) \geq 3$. Misalkan $rc(G) = 3$ dengan c adalah suatu pewarnaan *rainbow* dengan tiga warna. Misalkan semua sisi di graf lengkap K_6 ke- i diwarnai dengan warna i , untuk $1 \leq i \leq 3$. masing-masing graf lengkap K_6 diwarnai berbeda. Agar terdapat lintasan *rainbow* dari titik di W_6 ke titik lain di graf G , haruslah ditambahkan minimal satu warna baru yang berbeda dengan ketiga warna yang telah ada. Jadi haruslah $rc(G) \geq 4$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rc(G) \leq 4$. Didefinisikan pewarnaan sebagai berikut :

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = vu_5, vv_{iq}, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq q \leq 5, q \text{ ganjil}, \\ & e = u_o u_j, j = 3p + 1, 0 \leq p \leq 1, \\ 2, & \text{untuk } e = vu_1, u_o u_5, vv_{ip}, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq p \leq 5, p \text{ genap}, \\ & e = u_o u_j, j = 3p + 2, 0 \leq p \leq 1, \\ 3, & \text{untuk } e = vu_o, v_{ij} v_{ik}, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 5, j \neq k \\ & e = u_o u_j, j = 3p + 3, 0 \leq p \leq 1, \\ 4, & \text{untuk } e = u_q u_{q+1}, 1 \leq q \leq 4. \end{cases}$$

Berdasarkan pewarnaan tersebut, dapat dicek bahwa di antara setiap dua titik x dan y di G , selalu terdapat lintasan- (x, y) *rainbow*. Sehingga diperoleh bahwa $rc(G) \leq 4$.

Dapat disimpulkan bahwa $rc(G) = 4$. □

Pada Gambar 1 diberikan pewarnaan *rainbow* terhadap graf $G \simeq (3K_6 * W_6, v)$.

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah diperoleh bahwa $rc(3K_6 * W_6, v) = 4$.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Narwen, M.Si, ibu Dr. Ferra Yanuar, dan bapak Budi Rudianto, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G., Kalamazoo, G. L. Johns, S. Valley, and K. A. McKeon. 2006. Rainbow connection in graph. *Mathematica Bohemica* **133**: 85 – 89

Gambar 1. *Rainbow Connection Number* pada graf $(3K_6 * W_6, v)$

- [2] Fitriani, D dan A. N. M Salman. 2016. Rainbow connection number of amalgamation of some graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, **13**: 90 – 99