Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **1** Hal. 6 – 13
ISSN : 2303–291X

BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF AMALGAMASI BINTANG

FADHILAH SYAMSI
Program Studi Matematika,
Pascasarjana Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,

Abstract. Let $G = (V, E)$ be a connected graph and c a coloring of G. For $i = 1, 2, ..., k$, we define the color classes C_i as the set of vertices receiving color i. The color code $c_\Pi(v)$ of a vertex $v \in V(G)$ is the k-vector $(d(v, C_1), d(v, C_2), ..., d(v, C_k))$, where $d(v, C_i)$ is the distance between v and C_i. If all vertices of G have distinct color codes, then c is called a locating-coloring of G. The locating-coloring number of graph G, denoted by $\chi_L(G)$, is the smallest positive integer k such that G has a locating coloring with k color. Let K_{1,n_i} be star, where n_i is the number of leaves of each star K_{1,n_i}. We define the vertex amalgamation of star, denoted by $S_{k,(n_1,...,n_k)}$, as a graph obtained from stars K_{1,n_i} by identifying one arbitrary leaf from each star. We define the edge amalgamation of star, denoted by $S^*_{k,(n_1,...,n_k)}$, as a graph obtained by uniting an edge of each star. If $n_i = m$ for each i, then we denoted the vertex amalgamation of star as $S_{k,m}$ and the edge amalgamation of star as $S^*_{k,m}$. In this paper we discuss the locating coloring of $S_{k,(n_1,...,n_k)}$ and $S^*_{k,(n_1,...,n_k)}$.

Kata Kunci: Amalgamation of star, locating-chromatic number

1. Pendahuluan

Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dengan menggunakan warna-warna $1, 2, ..., k$ untuk suatu bilangan bulat positif k. Secara ekivalen, c merupakan suatu partisi Π dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang saling bebas $C_1, C_2, ..., C_k$, dimana titik-titik pada C_i diberi warna i, $1 \le i \le k$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai k-vektor:

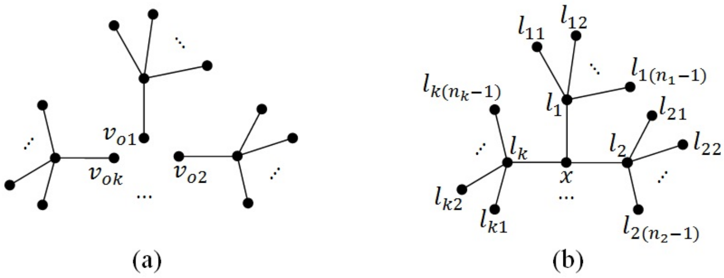
$$c_\Pi(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), ..., d(v, C_k))$$

dimana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x)|x \in C_i\}$ untuk $1 \le i \le k$. Jika setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda terhadap partisi Π, maka c disebut pewarnaan lokasi.

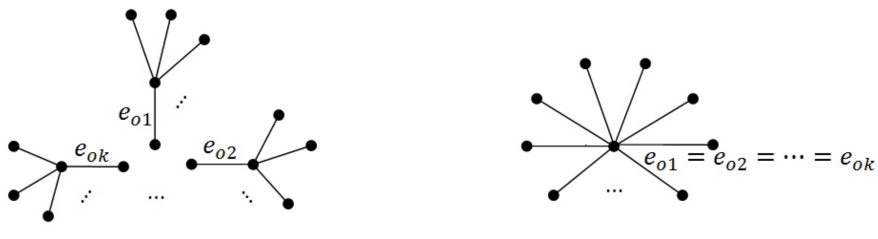
Kajian tentang pewarnaan lokasi adalah suatu kajian yang cukup baru dalam bidang teori graf. Konsep pewarnaan lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. [6] pada tahun 2002 dengan menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf sebagai berikut. Untuk graf lintasan P_n dengan $n \ge 3$ diperoleh $\chi_L(P_n) = 3$. Untuk graf siklus diperoleh dua hasil yaitu untuk n ganjil berlaku $\chi_L(C_n) = 3$ dan untuk n genap berlaku $\chi_L(C_n) = 4$. Selanjutnya, juga diperoleh $\chi_L(G)$ untuk graf multipartit lengkap dan dua graf bintang. Pada tahun 2003 Chartrand dkk. [7] membuktikan bahwa bilangan kromatik lokasi untuk graf G dengan orde

n yang memuat graf multipartit lengkap berorde $n-1$ sebagai subgraf induksinya, berada pada selang $[\frac{(n+1)}{2}, n]$. Karena masih sedikit bilangan kromatik lokasi yang diketahui, maka topik pewarnaan lokasi menarik untuk dikaji lebih lanjut.

Misalkan terdapat k buah graf bintang $K_{1,n_i}, n_i \geq 1$, untuk setiap $i = 1, 2, ..., k$ dengan k, n_i adalah bilangan bulat. Graf amalgamasi titik bintang, $S_{k,(n_1,n_2,...,n_k)}$, dengan $k \geq 2$, adalah graf yang diperoleh dengan mengidentifikasi sebuah daun dari setiap bintang. Titik hasil identifikasi disebut pusat amalgamasi, dinotasikan x. Titik yang berjarak satu dari pusat amalgamasi disebut titik tengah, dinotasikan l_i, $i = 1, 2, ..., k$ dan titik daun ke-j dari titik tengah l_i adalah $l_{ij}, j = 1, 2, ..., m-1$. Jika $n_i = m$ dengan $m \geq 1$ untuk semua i, graf amalgamasi titik dari bintang dinotasikan sebagai $S_{k,m}$. Graf amalgamasi sisi bintang, $S^*_{k,(n_1,n_2,...,n_k)}$, untuk $k \geq 2$, adalah graf yang diperoleh dengan menyatukan sebuah sisi dari setiap graf K_{1,n_i}. Jika $n_i = m$, $m \geq 1$ untuk semua i, amalgamasi sisi dari k graf bintang $K_{1,m}$ dinotasikan sebagai $S^*_{k,m}$.



Gambar 1. (a) k buah Graf Bintang K_{1,n_i}, (b) $S_{k,(n_1,n_2,...,n_k)}$



Gambar 2. (a) k Buah Graf Bintang K_{1,n_i}, (b) $S^*_{k,(n_1,n_2,...,n_k)}$

Suatu graf bintang $K_{1,n}$ mempunyai bilangan kromatik lokasi $n+1$ karena semua titik harus mempunyai kode warna yang berbeda. Jika $K_{1,m} \subseteq K_{1,n}$ maka $\chi_L(K_{1,m}) \leq \chi_L(K_{1,n})$. Pada tulisan ini, akan dikaji sifat kemonotonan dari bilangan kromatik lokasi untuk graf amalgamasi bintang. Misalkan terdapat suatu amalgamasi dari k graf bintang $K_{1,m}$, dinotasikan dengan $S_{k,m}$. Akan ditentukan syarat cukup untuk suatu subgraf terhubung $H \subseteq S_{k,m}$ sehingga dipenuhi

$\chi_L(H) \leq \chi_L(S_{k,m})$.

Teorema dan akibat dari Chartrand dkk. (2002) [6] berikut digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini.

Teorema 1.1. [5] *Misal c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik pada graf G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = (C_1, C_2, ..., C_k)$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G)\backslash\{u,v\}$ maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Dengan demikian, $c(u) \neq c(v)$. □

Akibat 1.2. [5] *Jika G adalah suatu graf terhubung yang memuat suatu titik yang bertetangga dengan k daun di G, maka $\chi_L(G) \geq k+1$.*

Bukti. Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun $x_1, x_2, ..., x_k$ di G. Dari Teorema 1.1 setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna berbeda untuk setiap $x_i, i = 1, 2, ..., k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k+1$□

2. Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Amalgamasi Titik Bintang

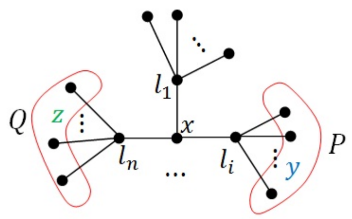
Pada [1], Asmiati, Assiyatun, dan Baskoro memberikan nilai bilangan kromatik lokasi untuk graf amalgamasi titik bintang. Pada bagian ini, penulis akan mengkaji kembali bilangan kromatik lokasi untuk graf amalgamasi titik bintang.

Lema 2.1. [1] *Misalkan c adalah pewarnaan dari $S_{k,m}$ menggunakan paling sedikit m warna dengan $k, m \geq 2$. Pewarnaan c adalah pewarnaan lokasi jika dan hanya jika $c(l_i) = c(l_n), i \neq n$ mengakibatkan $\{c(l_{ij})|j = 1, 2, ..., m-1\}$ dan $\{c(l_{nj})|j = 1, 2, ..., m-1\}$ adalah dua himpunan yang berbeda.*

Bukti. Misalkan $P = \{c(l_{ij})|j = 1, 2, ..., m-1\}$ dan $Q = \{c(l_{nj})|j = 1, 2, ..., m-1\}$. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi dari $S_{k,m}$, $k \geq 2$ dan $m \geq 2$ menggunakan paling sedikit m warna dan $c(l_i) = c(l_n)$ untuk beberapa $i \neq n$. Misalkan Π adalah partisi dari $V(G)$ ke dalam kelas warna dengan $|\Pi| \geq m$. Andaikan $P = Q$. Karena $d(l_i, u) = d(l_n, u)$ untuk setiap $u \in V \setminus \{\{l_{ij}|j = 1, 2, ..., m-1\} \cup \{l_{nj}|j = 1, 2, ..., m-1\}\}$ maka kode warna dari l_i dan l_n akan sama. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian bahwa c adalah pewarnaan lokasi. Dengan demikian $P \neq Q$. Selanjutnya, perhatikan bahwa $c(l_i) = c(l_n), i \neq n$. Karena $P \neq Q$, terdapat warna

y dan warna z sedemikian sehingga ($y \in P, y \notin Q$) dan ($z \notin P, z \in Q$). Akan ditunjukkan bahwa kode warna untuk setiap $v \in V(S_{k,m})$ adalah tunggal, yaitu sebagai berikut.

(1) Akan diperiksa kode warna dari titik-titik tengah yang mempunyai warna yang sama. Berdasarkan ilustrasi di atas, diperoleh bahwa:



Gambar 3. Graf $S_{k,m}$ dengan $P \neq Q$

- Jika $c(x) = y$ maka
$$c_\Pi(l_i) = (\ldots, \underbrace{\quad 1 \quad}_{\text{ordinat ke-}y}, \ldots, \underbrace{2 \text{ atau } 3}_{\text{ordinat ke-}z}, \ldots)$$
$$c_\Pi(l_n) = (\ldots, \overbrace{\quad 1 \quad}, \ldots, \overbrace{\quad 1 \quad}, \ldots)$$
- Jika $c(x) = z$ maka
$$c_\Pi(l_i) = (\ldots, \underbrace{\quad 1 \quad}_{\text{ordinat ke-}y}, \ldots, \underbrace{\quad 1 \quad}_{\text{ordinat ke-}z}, \ldots)$$
$$c_\Pi(l_n) = (\ldots, \overbrace{2 \text{ atau } 3}, \ldots, \overbrace{\quad 1 \quad}, \ldots)$$
- Jika $c(x)$ selain y dan z maka
$$c_\Pi(l_i) = (\ldots, \underbrace{\quad 1 \quad}_{\text{ordinat ke-}y}, \ldots, \underbrace{2 \text{ atau } 3}_{\text{ordinat ke-}z}, \ldots)$$
$$c_\Pi(l_n) = (\ldots, \overbrace{2 \text{ atau } 3}, \ldots, \overbrace{\quad 1 \quad}, \ldots)$$

Dengan demikian, kode warna berbeda di ordinat ke-y atau ordinat ke-z. Akibatnya, $c_\Pi(l_i) \neq c_\Pi(l_n)$.

(2) Akan diperiksa kode warna dari daun-daun yang mempunyai warna yang sama. Jika $c(l_{kl}) = c(l_{rs})$, untuk beberapa $l_k \neq l_r$, akan ditunjukkan bahwa $c_\Pi(l_{kl}) \neq c_\Pi(l_{rs})$. Perhatikan dua kasus:

- Kasus 1. Jika $c(l_k) = c(l_r)$ maka berdasarkan premis Lema 2.1 diperoleh $P \neq Q$. Jadi, $c_\Pi(l_{kl}) \neq c_\Pi(l_{rs})$.
- Kasus 2. Misalkan $c(l_k) = t_1$ dan $c(l_r) = t_2$, dengan $t_1 \neq t_2$. Maka $c_\Pi(l_{kl}) \neq c_\Pi(l_{rs})$ karena kode warna berbeda paling sedikit di ordinat ke-t_1 dan ordinat ke-t_2, yaitu
$$c_\Pi(l_{kl}) = (\ldots, \underbrace{\quad 1 \quad}, \ldots, \underbrace{2, 3 \text{ atau } 4}, \ldots)$$

$$c_\Pi(l_{rs}) = (..., \overbrace{2, 3, \text{ atau } 4}^{\text{ordinat ke-}t_1}, \; ... \;, \overbrace{\quad 1 \quad}^{\text{ordinat ke-}t_2}, \; ...)$$

(3) Akan diperiksa kode warna dari titik tengah dan daun yang mempunyai warna yang sama.

Jika $c(l_i) = c(l_{nj}), l_i \neq l_n$ maka $c_\Pi(l_i)$ memuat paling sedikit dua komponen dengan nilai 1, sedangkan $c_\Pi(l_{nj})$ memuat tepat satu komponen dengan nilai 1, yaitu

$$c_\Pi(l_i) = (..., \underbrace{\quad 1 \quad}_{\text{ordinat ke-}c(x)}, \; ... \;, \underbrace{\quad 1 \quad}_{\text{ordinat ke-}c(l_{ij})}, \; ...)$$

$$c_\Pi(l_{nj}) = (..., \underbrace{\quad 1 \quad}_{\text{ordinat ke-}c(l_n)}, \; ...)$$

Dengan demikian $c_\Pi(l_i) \neq c_\Pi(l_{nj})$.

(4) Akan diperiksa kode warna dari titik pusat amalgamasi dan daun yang mempunyai warna yang sama.

Misal $c(x) = c(l_{ij})$. Karena $k \geq 2$, maka kode warna dari $c_\Pi(x)$ memuat paling sedikit dua komponen dengan nilai 1, sedangkan $c_\Pi(l_{ij})$ memuat tepat satu komponen dengan nilai 1, yaitu

$$c_\Pi(x) = (..., \underbrace{\quad 1 \quad}_{\text{ordinat ke-}c(l_i)}, \; ... \;, \underbrace{\quad 1 \quad}_{\text{ordinat ke-}c(l_n)}, \; ...)$$

$$c_\Pi(l_{ij}) = (..., \underbrace{\quad 1 \quad}_{\text{ordinat ke-}c(l_i)}, \; ...)$$

Dengan demikian $c_\Pi(x) \neq c_\Pi(l_{ij})$.

Dari semua kasus di atas, dapat dilihat bahwa kode warna untuk setiap titik di $S_{k,m}$ adalah tunggal. Dengan demikian c adalah pewarnaan lokasi. $\square$

Lema 2.2. [1] *Misal c adalah pewarnaan lokasi dari $S_{k,m}$ menggunakan $m + a$ warna dan $H(a) = (m + a - 1)\binom{m+a-1}{m-1}, a \geq 0$, maka $k \leq H(a)$.*

Bukti. Misal c adalah pewarnaan lokasi dari $S_{k,m}$ menggunakan $m + a$ warna. Untuk suatu titik tetap i, misal $c(l_i)$ warna dari titik tengah l_i, maka banyak kombinasi warna yang digunakan oleh $\{l_{ij} | j = 1, 2, ..., m - 1\}$ adalah$\binom{m+a-1}{m-1}$. Karena satu warna digunakan untuk titik pusat amalgamasi x, maka terdapat $(m + a - 1)$ warna untuk l_i, untuk setiap $i = 1, 2, ..., k$. Dari Lema 2.1, diperoleh nilai maksimum dari k adalah $(m + a - 1)\binom{m+a-1}{m-1} = H(a)$. Jadi, $k \leq H(a)$. $\square$

Teorema berikut memberikan nilai bilangan kromatik lokasi untuk graf amalgamasi titik bintang.

Teorema 2.3. *Diberikan bilangan bulat $a \geq 0, k \geq 2, m \geq 3$. Jika $H(a) = (m +$*

$a-1)\binom{m+a-1}{m-1}$, *maka*

$$\chi_L(S_{k,m}) = \begin{cases} m & ; untuk\ 2 \leq k \leq H(0), m \geq 3 \\ m+a & ; untuk\ H(a-1) < k \leq H(a), a \geq 1. \end{cases}$$

Bukti. Pertama-tama akan dicari batas bawah dan batas atas dari $\chi_L(S_{k,m})$ untuk $2 \leq k \leq H(0) = m-1$.

(1) Batas bawah dari $\chi_L(S_{k,m})$.
Dari Akibat 1.2, setiap titik l_i bertetangga dengan $(m-1)$ daun, untuk $i = 1, 2, ..., k$. Dengan demikian $\chi_L(S_{k,m}) \geq m$.
(2) Batas atas dari $\chi_L(S_{k,m})$.
Misalkan c adalah pewarnaan dari $V(S_{k,m})$ menggunakan m warna. Tanpa mengurangi keumuman, misal $c(x) = 1$ dan $c(l_i) = i+1$ untuk $i = 1, 2, ..., k$. Karena daun-daun harus mempunyai kode warna yang berbeda, maka daun-daun $\{l_{ij} | j = 1, 2, ..., m-1\}$ diberi warna oleh $\{1, 2, ..., m\} \setminus \{i+1\}$ untuk sebarang i. Maka, berdasarkan Lema 2.1, c adalah pewarnaan lokasi. Dengan demikian $\chi_L(S_{k,m}) \leq m$.

Selanjutnya, akan dicari batas bawah dan batas atas untuk $H(a-1) < k \leq H(a), a \geq 1$, yaitu sebagai berikut.

(1) Batas bawah dari $\chi_L(S_{k,m})$.
Karena $k > H(a-1)$, maka berdasarkan Lema 2.2 $\chi_L(S_{k,m}) \geq m+a$. Pada sisi lain, jika $k > H(a)$ maka berdasarkan Lema 2.2, $\chi_L(S_{k,m}) \geq m+a+1$. Dengan demikian, $\chi_L(S_{k,m}) \geq m+a$ jika $H(a-1) < k < H(a)$.
(2) Batas atas dari $\chi_L(S_{k,m})$.
Misalkan $c(x) = 1$ dan warna dari titik tengah l_i adalah $2, 3, ..., m+a$. Karena $H(a-1) < k \leq H(a), a \geq 1$ maka banyak titik tengah yang mempunyai warna t yang sama tidak lebih dari $\binom{m+a-1}{m-1}$, untuk sebarang t. Akibatnya, jika $c(l_i) = c(l_n), i \neq n$ dapat diatur $\{c(l_{ij}) | j = 1, 2, ..., m-1\} \neq \{c(l_{nj}) | j = 1, 2, ..., m-1\}$. Berdasarkan Lema 2.1, c adalah pewarnaan lokasi pada $S_{k,m}$. Jadi, $\chi_L(S_{k,m}) \leq m+a$ untuk $H(a-1) < k \leq H(a)$. □

Teorema berikut menjelaskan tentang sifat kemonotonan dari bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi titik bintang.

Teorema 2.4. [1] *Jika* $2 \leq k \leq m-1$, *maka* $\chi_L(G) \leq \chi_L(S_{k,m})$ *untuk setiap* $G \subseteq S_{k,m}$ *dan* $G \neq K_{1,m}$.

Misalkan $S_{k,(n_1,n_2,...,n_k)} \subseteq S_{k,m}$. Definisikan $A = \{i | n_i = 1\}$. Untuk $k \geq m$, batasi subgraf dari $S_{k,m}$ yang memenuhi sifat kemonotonan.

Teorema 2.5. [1] *Jika* $k \geq m$ *dan* $|A| \leq \chi_L(S_{k,m}) - 1$ *maka*

$$\chi_L(S_{k,(n_1,n_2,...,n_k)}) \leq \chi_L(S_{k,m}).$$

3. Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Amalgamasi Sisi Bintang

Selain membahas kembali bilangan kromatik lokasi untuk graf amalgamasi titik bintang, yang merujuk makalah [2], penulis memberikan kontribusi pada bilangan kromatik lokasi untuk graf amalgamasi sisi bintang yang dibahas pada bagian ini.

Teorema 3.1. *Jika terdapat bilangan bulat $k, m \geq 2$, maka*

$$\chi_L(S^*_{k,m}) = k(m-1) + 2.$$

Bukti. Diberikan k buah graf $K_{1,m}$. Graf amalgamasi sisi bintang dari graf $K_{1,m}$ adalah $S^*_{k,m}$ dengan titik pusat v. Banyak daun dari graf $S^*_{k,m}$ adalah

$$\begin{aligned}|V(S^*_{k,m}) \setminus v| &= \sum_{i=1}^{k}(m-1) + 1\\ &= k(m-1) + 1.\end{aligned}$$

Karena v bertetangga dengan $k(m-1)+1$ daun, maka berdasarkan Teorema 1.1 titik v mempunyai warna yang berbeda dengan setiap daun $S^*_{k,m}$. Akibatnya, $\chi_L(S^*_{k,m}) = k(m-1) + 2$. □

Teorema 3.2. *Jika terdapat bilangan bulat $k, n_i \geq 2$, maka*

$$\chi_L(S^*_{k,(n_1,n_2,\ldots,n_k)}) = \sum_{i=1}^{k}(n_i) - (k-2).$$

Bukti. Diberikan k buah graf K_{1,n_i} dengan $n_i \geq 2$. Graf amalgamasi sisi dari graf K_{1,n_i} adalah $S^*_{k,(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$ dengan titik pusat v. Banyak daun dari graf $S^*_{k,(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$ adalah

$$\begin{aligned}|V(S^*_{k,(n_1,n_2,\ldots,n_k)}) \setminus v| &= \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) + 1\\ &= [(n_1-1) + (n_2-1) + \ldots + (n_k-1)] + 1\\ &= (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) - k + 1\\ &= \sum_{i=1}^{k}(n_i) - (k-1).\end{aligned}$$

Karena v bertetangga dengan $\sum_{i=1}^{k}(n_i) - (k-1)$ daun, maka berdasarkan Teorema 1.1 titik v mempunyai warna yang berbeda dengan setiap daun $S^*_{k,(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$. Akibatnya, $\chi_L(S^*_{k,(n_1,n_2,\ldots,n_k)}) = \sum_{i=1}^{k}(n_i) - (k-2)$. □

Daftar Pustaka

[1] Asmiati, H. Assiyatun, dan E.T. Baskoro. 2011. Locating-chromatic number of amalgamation of stars. *ITB J. Sci.* no.1. **43**:1-8.
[2] Bondy, J. A dan U. S. R Murty. 2008. **Graph Theory**. Springer. United States.
[3] Budayasa, Ketut. 2007. **Teori Graf dan Aplikasinya**. Universitas Negeri Surabaya.

[4] Chartrand, G. dan P. Zhang. 2005. **Introduction to Graph Theory**. McGraw-Hill. Boston.

[5] Chartrand, G., dkk. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**:89-101.

[6] Chartrand, G., dkk. 2003. Graph of order n with locating-chromatic number $n-1$. *Discrete Math.* **269**:65-79.

[7] Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1994. **Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction, Revised and Augmented**. Academic Press, San Diego.