Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **3** Hal. 65 – 73
ISSN : 2303–291X

DETERMINAN DAN ADJOIN MATRIKS *FUZZY*

HANIFAH, NOVA NOLIZA BAKAR, MONIKA RIANTI HELMI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email: h4nifah03@gmail.com

Abstrak. Matriks *fuzzy* adalah matriks yang entri-entrinya berupa suatu bilangan yang berada pada selang tutup [0,1]. Pada matriks bujursangkar dengan entri-entrinya bilangan fuzzy, dapat dicari determinan dan adjoin dari matriks tersebut. Determinan matriks *fuzzy* adalah jumlah dari semua hasilkali elementer dari matriks tersebut, sedangkan adjoin dari matriks *fuzzy* adalah suatu matriks dengan entri-entrinya berupa determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-j dan kolom ke-i dihilangkan. Dalam tulisan ini diperoleh bahwa pada umumnya sifat-sifat yang terkait dengan determinan pada matriks *fuzzy* dan matriks riil adalah sama, yang membedakan yaitu pada suatu matriks *fuzzy* A jika $k \in F$ maka $\det(kA) = k \det(A)$. Selanjutnya sifat-sifat yang terkait pada adjoin matriks *fuzzy* diantaranya yaitu, misalkan A dan B merupakan matriks *fuzzy* diperoleh: (1) jika A kurang atau sama dengan B maka $\det(A)$ kurang atau sama dengan $\det(B)$, (2) adjoin dari matriks A yang ditransposkan sama dengan $\text{adj}(A)$ ditransposkan, (3) A dikali dengan $\text{adj}(A)$ lebih atau sama dengan mutlak A dikali dengan matriks identitas.

Kata Kunci: Matriks *fuzzy*, matriks bujursangkar, determinan, adjoin, hasilkali elementer, transpos

Diterima	:	*6 Juli 2018*
Direvisi	:	*15 September 2018*
Dipublikasikan	:	*21 Desember 2018*

1. Pendahuluan

Matriks *fuzzy* didefinisikan pertama kali oleh Thomson pada tahun 1977 [5], kemudian teori dari matriks *fuzzy* dikembangkan oleh Kim and Roush, yang merupakan lanjutan dari matriks Boolean [4]. Matriks Boolean merupakan kasus khusus pada matriks *fuzzy* dimana entri-entrinya adalah $\{0,1\}$.

Determinan pada matriks *fuzzy* adalah jumlah dari semua hasilkali elementer dari matriks tersebut. Sedangkan adjoin pada matriks *fuzzy* adalah matriks yang entri-entrinya merupakan determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-j dan kolom ke-i dihilangkan dari matriks tersebut.

2. Tinjauan Teori

2.1. *Aljabar Fuzzy dan Matriks Fuzzy*

Definisi 2.1. [7] *Misalkan $a, b \in F$ dengan $F = [0, 1]$ maka operasi penjumlahan dan perkalian pada a, b didefinisikan sebagai berikut,*

$$a + b = \max\{a, b\}, \qquad a \cdot b = \min\{a, b\}. \tag{2.1}$$

Definisi 2.2. [6] *Aljabar fuzzy adalah sistem matematika $(F, +, .)$ dengan operasi $+$ dan $\cdot$ yang didefinisikan pada himpunan $F = [0, 1]$, dimana untuk setiap $a, b, c \in F$ berlaku:*

(1) $a + a = a$ *dan* $a \cdot a = a$,
(2) $a + b = b + a$ *dan* $a \cdot b = b \cdot a$,
(3) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *dan* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
(4) $a + (a \cdot b) = a$ *dan* $a \cdot (a + b) = a$,
(5) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *dan* $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$,
(6) terdapat $0 \in F$ *sehingga* $a + 0 = a$ *dan* $a \cdot 0 = 0$,
(7) terdapat $1 \in F$ *sehingga* $a + 1 = 1$ *dan* $a \cdot 1 = a$.

Definisi 2.3. [7] *Matriks $A = [a_{ij}]$ dikatakan matriks fuzzy jika $a_{ij} \in [0, 1]$.*

Definisi 2.4. [6] *Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks-matriks fuzzy berukuran $m \times n$, maka penjumlahan dari A, B didefinisikan sebagai berikut,*

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij} + b_{ij}] \\ &= [\max\{a_{ij}, b_{ij}\}]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Definisi 2.5. [6] *Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ masing-masing adalah matriks fuzzy berukuran $m \times p$ dan $p \times n$, maka perkalian dari A, B didefinisikan sebagai berikut,*

$$\begin{aligned} AB &= [a_{ij} \cdot b_{ij}] \\ &= \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}, b_{kj}\right] \\ &= [\max_k\{\min\{a_{ik}, b_{kj}\}\}]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Definisi 2.6. [6] *Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks fuzzy berukuran $m \times n$ dan $k \in [0, 1]$, maka perkalian k dengan A didefinisikan sebagai berikut,*

$$\begin{aligned} k \cdot A &= [k \cdot a_{ij}] \\ &= [\min\{k, a_{ij}\}]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Definisi 2.7. [6] *Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks-matriks fuzzy berukuran $m \times n$. Dikatakan $A \leq B$ apabila $a_{ij} \leq b_{ij}$ untuk setiap i, j.*

2.2. *Determinan dan Adjoin Matriks Biasa*

Suatu hasilkali elementer dari suatu matriks A berukuran $n \times n$ adalah hasilkali dari n entri A, yang tidak berasal dari baris atau kolom yang sama [1]. Sedangkan hasilkali elementer bertanda dari A adalah hasilkali elementer dikalikan dengan $+1$ jika permutasi genap atau -1 jika permutasi ganjil [1].

Definisi 2.8. [1] *Misalkan A suatu matriks bujursangkar. Fungsi determinan dari A dinotasikan dengan $det(A)$ dan didefinisikan sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari A. Angka $det(A)$ disebut determinan dari A.*

Teorema 2.9. [1] *Misalkan A adalah matriks bujursangkar.*

(a) Jika A memiliki satu baris atau satu kolom dengan entri-entrinya nol, maka $det(A) = 0$.
(b) $\det(A) = \det(A^T)$.

Teorema 2.10. [1] *Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka* $\det(A)$ *adalah hasilkali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu det(A) = $a_{11}\, a_{22}\, \cdots\, a_{nn}$.*

Teorema 2.11. [1] *Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$ dan B adalah matriks yang diperoleh ketika satu baris atau satu kolom dari matriks A dikalikan dengan suatu skalar k, maka* $\det(B) = k \det(A)$.

Definisi 2.12. [1] *Jika A adalah suatu matriks bujursangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri A_{ij}.*

Teorema 2.13. [1] *Determinan dari matriks A berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh, di mana untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,*

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}(ekspansi\, kofaktor\, sepanjang\, kolom\, ke-j),$$
$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}(ekspansi\, kofaktor\, sepanjang\, baris\, ke-i).$$

Definisi 2.14. [1] *Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks*

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

2.3. *Grup Simetrik*

Definisi 2.15. [2] *Sebuah fungsi atau pemetaan ϕ dari himpunan A ke himpunan B adalah sebuah aturan yang mengaitkan setiap elemen a dari A tepat ke satu elemen b dari B. Dikatakan ϕ memetakan a ke b, dan ϕ memetakan A ke B.*

Definisi 2.16. [2] *Sebuah fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah **satu-satu** jika setiap elemen dari B mempunyai paling banyak satu elemen dari A yang dipetakan ke B, dan **pada** jika setiap elemen dari B mempunyai paling sedikit satu elemen dari A yang dipetakan ke B.*

Definisi 2.17. [2] *Sebuah permutasi dari himpunan A adalah sebuah fungsi $\phi : A \to A$ yang **satu-satu** dan **pada**. Dengan kata lain, sebuah permutasi dari A adalah fungsi **satu-satu** dan **pada** dari A ke A.*

Definisi 2.18. [2] *Misal A himpunan berhingga $\{1, 2, \cdots, n\}$. Himpunan semua permutasi A adalah grup simetrik berderajat n, dan dinotasikan dengan S_n.*

3. Determinan Matriks *Fuzzy*

Definisi 3.1. [6] *Misalkan A adalah suatu matriks fuzzy berukuran $n \times n$, determinan dari matriks fuzzy A dinotasikan dengan $\det(A)$ dan didefinisikan sebagai*

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \tag{3.1}$$

dengan S_n adalah grup simetrik pada $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Dengan menggunakan Definisi 2.4 dan Definisi 2.5, diperoleh

$$\det(A) = \max_{\pi \in S_n}\{min\{a_{1\pi(1)},\, a_{2\pi(2)},\, \cdots,\, a_{n\pi(n)}\}\}. \tag{3.2}$$

Teorema 3.2. [6] *Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks fuzzy berukuran $n \times n$, maka*

(i) $\det(A) = \det(A^T)$ *; A^T adalah transpos dari matriks fuzzy A.*
(ii) Misalkan $b \in F$, maka $\det(bA) = b\det(A)$.

Bukti.

(i) Diketahui bahwa $\det(A)$ merupakan jumlah dari semua hasilkali elementer dari A. Transpos yaitu mempertukarkan baris-baris pada A menjadi kolom-kolom pada A^T dan sebaliknya, sehingga dengan menggunakan definisi hasilkali elementer diperoleh bahwa $\det(A)$ dan $\det(A^T)$ memiliki himpunan hasilkali elementer yang tepat sama, dan mengakibatkan $\det(A) = \det(A^T)$.
(ii) Berdasarkan Definisi 3.1 diperoleh

$$\begin{aligned}\det(bA) &= \sum_{\pi \in S_n} b\, a_{1\pi(1)}\, b\, a_{2\pi(2)} \cdots b\, a_{n\pi(n)} \\ &= b^n \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= b\ \det(A).\end{aligned}$$

□

Definisi 3.3. [6] *Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah suatu matriks fuzzy berukuran $n \times n$, dan B adalah matriks yang diperoleh dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A. Determinan dari B dinotasikan dengan A_{ij}.*

Teorema 3.4. [6] *Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah suatu matriks fuzzy berukuran $n \times n$ untuk $n \geq 2$, maka $\det(A) = |A| = \sum_{t=1}^{n} a_{it}A_{it}$, untuk suatu $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Bukti. Diketahui bahwa $\det(A)$ merupakan jumlah dari semua hasilkali elementer dari A, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \,\cdots\, a_{n\pi(n)} \\
&= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} + a_{11}a_{22}\cdots a_{(n-2)(n-2)}a_{(n-1)n}a_{n(n-1)} + \cdots + \\
&\quad a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-1)2}a_{n1} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \\
&\quad a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\, A_{11} + a_{12}\, A_{12} + \cdots + a_{1n}\, A_{1n} = \sum_{t=1}^{n} a_{1t}\, A_{1t}.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.5. [6] *Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah matriks fuzzy, maka*

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}\right) \det\left(\begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix}\right) \leq \det(A).$$

Bukti. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\pi \in S_2} a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \\
&= a\, d + b\, c = \max\{\min\{a, d\}, \min\{b, c\}\}. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Misalkan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{\pi \in S_2} b_{1\pi(1)}\, b_{2\pi(2)} \\
&= a\, b + b\, a = \min\{a, b\}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Misalkan $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \det(C) &= \sum_{\pi \in S_2} c_{1\pi(1)}\, c_{2\pi(2)} \\ &= c\,d + d\,c = \min\{c, d\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dari persamaan (3.4) dan persamaan (3.5) diperoleh

$$\begin{aligned} \det(B)\det(C) &= \min\{a, b\} \cdot \min\{c, d\} \\ &= \min\{a, b, c, d\} \\ &\leq \max\{\min\{a, d\}, \min\{b, c\}\}. \end{aligned}$$

Sehingga terbukti $\det(B)\det(C) \leq \det(A)$. □

Proposisi 3.6. [6] *Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah suatu matriks fuzzy berukuran $n \times n$.*

(1) Jika B adalah matriks fuzzy yang diperoleh dengan mengalikan baris atau kolom ke-i pada A dengan suatu $k \in [0, 1]$, maka $|B| = k|A|$.
(2) Jika A mengandung baris atau kolom nol, maka $|A| = 0$.
(3) Jika A adalah matriks segitiga, maka $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$, dimana $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\, a_2\, a_3\, \cdots\, a_n$.

Bukti.

(1) Berdasarkan Definisi 3.1 diperoleh

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)}\, \cdots\, k\, a_{p\pi(p)}\, \cdots\, a_{n\pi(n)} \\ &= k \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)}\, \cdots\, a_{p\pi(p)}\, \cdots\, a_{n\pi(n)} \\ &= k\, \det(A). \end{aligned}$$

(2) Dengan menggunakan bukti pada (1) dan dengan menetapkan $k = 0$, maka diperoleh $\det(A) = 0$.

(3) Diketahui bahwa $\det(A)$ merupakan jumlah dari semua hasilkali elementer dan karena A merupakan matriks *fuzzy* segitiga atas, maka A memiliki $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$. Akibatnya setiap hasilkali elementer yang memuat $a_{ij} = 0$ adalah nol, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \det(A) &= \max_{\pi \in S_n}\{\min\{a_{1\pi(1)},\, a_{2\pi(2)},\, \cdots,\, a_{n\pi(n)}\}\} \\ &= \max\{\min\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}, 0, 0, \cdots, 0\} \\ &= \min\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \end{aligned}$$

□

4. Adjoin Matriks *Fuzzy*

Definisi 4.1. [6] *Misalkan* $A = [a_{ij}]$ *adalah matriks fuzzy berukuran* $n \times n$ *dan* $B = [b_{ij}]$ *dikatakan* $adj(A)$ *jika* $b_{ij} = |A_{ji}|$ *yaitu determinan dari matriks fuzzy berukuran* $(n-1) \times (n-1)$ *yang diperoleh dengan menghapus baris ke-j dan kolom ke-i pada A.*

Dalam [6] diberikan entri dari B sebagai berikut:

$$b_{ij} = \sum_{\pi \in S_{n_j\, n_i}} \prod_{t \in n_j} a_{t\pi(t)} \tag{4.1}$$

dimana $n_j = \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{j\}$ dan $S_{n_j\, n_1}$ adalah himpunan semua permutasi n_j atas n_i.

Proposisi 4.2. [6] *Misalkan A dan B adalah matriks fuzzy berukuran* $n \times n$*, maka*

(1) $A \leq B$ *mengakibatkan* $adj(A) \leq adj(B)$.
(2) $adj(A) + adj(B) \leq adj(A+B)$.
(3) $adj(A^T) = (adj(A))^T$.

Bukti. Misalkan adj(A)=C=$[c_{ij}]$, adj(B)=D=$[d_{ij}]$ dan adj$(A+B)$=E=$[e_{ij}]$.

(1) Dengan menggunakan persamaan (4.1) diperoleh

$c_{ij} = \sum_{\pi \in S_{n_j\, n_i}} \prod_{t \in n_j} a_{t\pi(t)}$ dan $d_{ij} = \sum_{\pi \in S_{n_j\, n_i}} \prod_{t \in n_j} b_{t\pi(t)}$,
karena $A \leq B$, maka berdasarkan Definisi 2.7 diperoleh $a_{t\pi(t)} \leq b_{t\pi(t)}$ $\forall t \in n_j$, sehingga adj$(A) \leq$ adj(B).

(2) Diketahui $A \leq (A+B)$ dan $B \leq (A+B)$. Berdasarkan Proposisi 4.2 (1) diperoleh

(a) adj$(A) \leq$ adj$(A+B)$ akibatnya $[c_{ij}] \leq [e_{ij}]$,
(b) adj$(B) \leq$ adj$(A+B)$ akibatnya $[d_{ij}] \leq [e_{ij}]$.

Dari (a) dan (b) diperoleh

$$\begin{aligned} adj(A) + adj(B) &= [\max\{c_{ij}, d_{ij}\}] \\ &\leq [e_{ij}]. \end{aligned}$$

(3) Perhatikan bahwa

$$adj(A) = \begin{bmatrix} |A_{11}| & |A_{21}| & \cdots & |A_{n1}| \\ |A_{12}| & |A_{22}| & \cdots & |A_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |A_{1n}| & |A_{2n}| & \cdots & |A_{nn}| \end{bmatrix} \text{ dan } adj(A^T) = \begin{bmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| & \cdots & |A_{1n}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| & \cdots & |A_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |A_{n1}| & |A_{n2}| & \cdots & |A_{nn}| \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh

$$(adj(A))^T = \begin{bmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| & \cdots & |A_{1n}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| & \cdots & |A_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |A_{n1}| & |A_{n2}| & \cdots & |A_{nn}| \end{bmatrix} = adj(A^T).$$

□

Proposisi 4.3. [6] *Misalkan* $A = [a_{ij}]$ *adalah matriks fuzzy berukuran* $n \times n$*, maka* $A\ adj(A) \geq |A|I_n$ *dengan* I_n *adalah matriks identitas berukuran* $n \times n$*.*

Bukti. Misalkan $C = A \cdot adj(A)$, maka

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} |A_{11}| & |A_{21}| & \cdots & |A_{n1}| \\ |A_{12}| & |A_{22}| & \cdots & |A_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |A_{1n}| & |A_{2n}| & \cdots & |A_{nn}| \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}|A_1j| & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}|A_2j| & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}|A_nj| \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}|A_1j| & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}|A_2j| & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}|A_nj| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}|A_1j| & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}|A_2j| & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}|A_nj| \end{bmatrix}.$$

Akibatnya

i. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}|A_jk| \geq 0$,
ii. $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}|A_ik| = a_{i1}|A_{i1}| + a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + a_{in}|A_{in}| = |A|$.

Sehingga berdasarkan entri-entri pada matriks $|A|I_n$ dan matriks C, diperoleh bahwa $A\ adj(A) \geq |A|I_n$. □

Proposisi 4.4. [6] *Misalkan* $A = [a_{ij}]$ *adalah matriks fuzzy berukuran* $n \times n$ *dan* A *mempunyai baris dengan entri nol, maka* $(adj(A))\ A = \mathbf{0}$ *(*$\mathbf{0}$ *adalah matriks nol).*

Bukti. Misalkan A matriks *fuzzy* berukuran $n \times n$ dengan entri nol pada baris ke-n dan $B = adj(A)$. Dengan menggunakan Proposisi 3.6 diperoleh $|A_{ij}| = 0$ jika $i \neq n$, sehingga

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & |A_{n1}| \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & |A_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & |A_{nn}| \end{bmatrix}, \text{ akibatnya}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & |A_{n1}| \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & |A_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & |A_{nn}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

□

5. Kesimpulan

Pada umumnya sifat-sifat yang terkait dengan determinan pada matriks *fuzzy* dan matriks riil adalah sama, sifat yang berbeda yaitu jika $k \in F$ dan A matriks *fuzzy* maka $\det(kA) = k \det(A)$.

Selain itu misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah matriks *fuzzy*, maka

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}\right) \det\left(\begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix}\right) \leq \det(A).$$

Misalkan $B = [b_{ij}]$ adalah adjoin dari matriks *fuzzy* A berukuran $n \times n$, entri-entri dari B yaitu $|A_{ji}|$ yang merupakan determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-j dan kolom ke-i dari matriks A dihilangkan. Entri-entri dari B juga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$b_{ij} = \sum_{\pi \in S_{n_j\, n_i}} \prod_{t \in n_j} a_{t\pi(t)}$$

dimana $n_j = \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{j\}$ dan $S_{n_j\, n_1}$ adalah himpunan semua permutasi n_j atas n_i.

Sifat-sifat yang terkait dengan adjoin matriks *fuzzy* yaitu misalkan A dan B merupakan matriks *fuzzy* berukuran $n \times n$, maka

(1) $A \leq B$ mengakibatkan $\mathrm{adj}(A) \leq \mathrm{adj}(B)$.
(2) $\mathrm{adj}(A) + \mathrm{adj}(B) \leq \mathrm{adj}(A + B)$.
(3) $\mathrm{adj}(A^T) = (\mathrm{adj}(A))^T$.
(4) Jika A mempunyai baris dengan entri nol, maka $(\mathrm{adj}(A))A = \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{0}$ adalah matriks nol).
(5) $A\ \mathrm{adj}(A) \geq |A| I_n$.

6. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Dr. Yanita, ibu Riri Lestari, M.Si, dan ibu Dr. Lyra Yulianti yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer; edisi ke-8*. Erlangga, Jakarta
[2] Fraleigh, J.B. 1993. *A First Course in Abstract Algebra; edisi ke-5*. Addison-Wesley Publishing Company, United States of America
[3] Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra; edisi ke-2*. John Wiley and Sons, New York
[4] Kim, K.H dan Roush, F.W. 1980. Generalized fuzzy matrices, *Fuzzy Sets and Systems* **4**:293 – 315
[5] M.G. Thomson. 1977. Convergence of power of a fuzzy matrix, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **57**:476 – 480
[6] Meenakshi, A.R. 2008. *Fuzzy Matrix Theory and Applications*, MJP Publishers, India
[7] Sidky, F.I dan E.G. Enam. 1992. Some Remarks on Section of a Fuzzy Matrix, *Journal of King Abdulaziz University Science* **4**:145 – 155