

DIMENSI PARTISI DARI GRAF KUBIK $C_{n,2n,n}$

IQBAL SANJAYA, NARWEN, BUDI RUDianto

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : Sanjayaibal234@gmail.com*

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan $S \subseteq V(G)$, dimana S adalah himpunan titik yang menjadi himpunan dari $V(G)$. Selanjutnya misalkan terdapat titik $v \in V(G)$. Maka jarak dari titik v ke himpunan S , dinotasikan dengan $d(v, S)$, didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x) | x \in S\}$, dimana $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x . Misalkan $V(G)$ dipartisi menjadi k buah himpunan, $S_1, S_2, \dots, S_k$ yang saling lepas. Definisikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dengan $S_i \subseteq V(G)$, untuk $i = 1, 2, \dots, k$ sebagai himpunan yang berisikan k -partisi, *Representasi* dari $v \in V(G)$ terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)$. Jika untuk setiap dua titik berbeda $v, x \in V(G)$ berlaku $r(v|\Pi) \neq r(x|\Pi)$, maka Π disebut *partisi pembeda* dari graf G . Kardinalitas dari partisi pembeda minimum disebut, *Dimensi partisi* dari graf G , dinotasikan $pd(G)$. Dalam penelitian ini ditentukan dimensi partisi pada graf kubik $C_{n,2n,n}$, untuk $n \geq 3$.

Kata Kunci: Dimensi partisi, partisi pembeda, graf kubik $C_{n,2n,n}$

Diterima : 6 Juli 2018
 Direvisi : 15 September 2018
 Dipublikasikan : 21 Desember 2018

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya bagi kehidupan manusia karna teori-teorinya dapat diterapkan dalam berbagai cabang ilmu pengetahuan seperti ekonomi, sosial, genetika, riset operasional serta membantu menyelesaikan permasalahan seperti masalah jaringan listrik, jaringan telepon, jaringan komputer dan sebagainya. Selanjutnya, beberapa penelitian baru dalam graf adalah dimensi metrik, dimensi partisi dan pewarnaan lokasi.

Graf adalah pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk pada graf dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf.

Salah satu topik yang menjadi kajian dalam teori graf adalah dimensi partisi yang dikenalkan oleh Chartrand, Salehi dan Zhang [2]. Partisi merupakan pembagian himpunan titik pada graf menjadi beberapa kelompok atau kelas suatu graf. Representasi dari suatu titik dapat dianggap sebagai vektor atau koordinat yang menunjukkan jarak titik tersebut relatif terhadap partisi yang dipilih. Suatu rep-

representasi yang baik harus memiliki vektor atau koordinat yang berbeda. Namun karena pemilihan partisi adalah sebarang, maka representasi yang dihasilkan tidaklah tunggal. Hal ini mengakibatkan tidak semua pilihan partisi dapat menghasilkan suatu representasi yang baik. Pemilihan partisi yang tepat menghasilkan suatu representasi dimana semua titiknya memiliki vektor atau koordinat yang berbeda.

Topik tentang dimensi partisi untuk beberapa kelas graf tertentu telah dikaji oleh beberapa peneliti, misalnya dimensi partisi graf pohon dikaji oleh Chartrand dkk [3]. Pada makalah ini, kita menentukan dimensi partisi untuk graf kubik yang dibentuk dari beberapa graf lingkaran C_n , C_{2n} dan graf lingkaran C_n dan disingkat $C_{n,2n,n}$, dengan $n \geq 3$.

2. Landasan Teori

Teorema 2.1. [3] Misalkan G suatu graf terhubung dengan orde $n \geq 2$. Maka $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$.

Lema 2.2. [4] Misalkan Π suatu partisi pembeda dari $V(G)$ dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua titik-titik $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka u dan v termasuk pada kelas berbeda dari Π .

3. Dimensi Partisi dari Graf Kubik $C_{n,2n,n}$

Didefinisikan suatu graf kubik $C_{n,2n,n}$ sebagai berikut. Suatu **graf kubik** C_{n_1,n_2,n_3} adalah suatu graf kubik yang dibentuk dari tiga buah graf lingkaran $C_{n_i}^i$ dengan $i = 1, 2, 3$, dimana $C_{n_i}^i := \{v_{i1}v_{i2} \cdots v_{in_i}v_{i1}\}$ adalah suatu graf lingkaran ke- i dengan n_i titik. Jadi, himpunan titik dan himpunan sisi dari graf kubik C_{n_1,n_2,n_3} adalah

$$V(C_{n_1,n_2,n_3}) = \bigcup_{i=1}^3 V(C_{n_i}^i),$$

$$E(C_{n_1,n_2,n_3}) = \bigcup_{i=1}^3 E(C_{n_i}^i) \cup \bigcup_{i=1}^2 E_i.$$

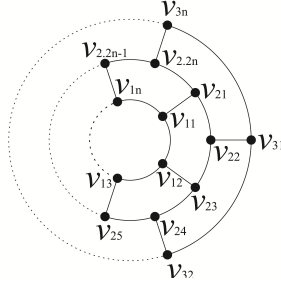
Jika $n_1 = n_3 = n$ dan $n_2 = 2n$, maka graf kubiknya adalah $C_{n,2n,n}$ dengan himpunan sisi E_i merupakan himpunan sisi yang menghubungkan graf lingkaran ke- i dengan graf lingkaran ke- $(i+1)$, dimana himpunan sisi $E_i = \{E_1, E_2\}$, dengan E_1 dan E_2 adalah sebagai berikut.

$$E_1 = \{v_{1j}v_{2(2j-1)} | j = 1, \dots, n\}, \text{ dengan } |E_1| = n,$$

$$E_2 = \{v_{2j}v_{3(j/2)} | j = 2, 4, \dots, 2n\}, \text{ dengan } |E_2| = n.$$

Teorema 3.1. Misalkan $C_{n,2n,n}$ adalah graf kubik dengan $n \geq 3$. Maka dimensi partisi dari graf kubik $C_{n,2n,n}$ adalah 4, dinotasikan $pd(C_{n,2n,n}) = 4$.

Bukti. Akan ditunjukkan $pd(C_{n,2n,n}) = 4$, untuk $n \geq 3$, dengan cara sebagai berikut.

Gambar 1. Graf Kubik $C_{n,2n,n}$

- (1) Akan ditunjukkan batas atas dari dimensi partisi graf kubik $C_{n,2n,n}$ yaitu $pd(C_{n,2n,n}) \leq 4$, untuk $n \geq 3$. Misalkan $\Pi_1 = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ adalah partisi pembeda dari graf kubik $C_{n,2n,n}$ dengan kelas partisi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(v_{i,j}) \in C_{n,2n,n} | i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, in\}, \\ S_2 &= \{v_{3,k} | k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}, \\ S_3 &= \{v_{3,l} | l = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2, \dots, n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}, \\ S_4 &= \{v_{3,m} | m = n + 1 - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor, n + 2 - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor, \dots, n\} \end{aligned}$$

Pada kelas partisi di atas akan terlihat bahwa untuk setiap titik $V(C_n^1)$ dan $V(C_n^3)$ berada pada kelas partisi yang berbeda, sehingga setiap titik $u, v \in V(C_{n,2n,n})$ mempunyai representasi yang berbeda, yaitu $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$. Maka diperoleh bahwa dimensi partisi $pd(C_{n,2n,n}) \leq 4$.

- (2) Selanjutnya akan ditunjukkan batas bawah dari dimensi partisi graf kubik $C_{n,2n,n}$ yaitu $pd(C_{n,2n,n}) \geq 4$, untuk $n \geq 3$. Untuk menunjukkan $pd(C_{n,2n,n}) \geq 4$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi_2 = \{S_1, S_2, S_3\}$ dari $C_{n,2n,n}$. Perhatikan bahwa graf $C_{n,2n,n}$ adalah graf terhubung yang berasal dari graf C_n , dimana $pd(C_n) = 3$. Selanjutnya, karena $|V(C_n^1)| = |V(C_n^3)|$, maka dimensi partisi kedua graf C_n adalah sama, Sehingga akan selalu terdapat titik $u, v \in V(C_n^1)$ berada pada kelas partisi yang sama dengan titik-titik di $V(C_n^3)$. Akibatnya terdapat paling sedikit n titik dengan representasi yang sama. Hal ini merupakan kontradiksi, sehingga haruslah $pd(C_{n,2n,n}) \geq 4$.

Dari dua kasus di atas, dapat dilihat bahwa $pd(C_{n,2n,n}) \neq 3$. Jadi haruslah $pd(C_{n,2n,n}) > 3$ dengan kata lain dimensi partisi dari graf kubik $C_{n,2n,n}$ yaitu $pd(C_{n,2n,n}) \geq 4$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Selain itu, setiap titik pada $V(C_n^1)$ dan $V(C_n^3)$ haruslah berada pada kelas partisi yang berbeda agar setiap titik pada graf kubik $C_{n,2n,n}$ memiliki representasi yang berbeda. Dengan demikian, $pd(C_{n,2n,n}) = 4$ untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$. $\square$

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah ditentukan dimensi partisi dari graf kubik $C_{n,2n,n}$, untuk $n \geq 3$.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Ibu Radhiatul Husna, M.Si, dan Ibu Riri Lestari, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran pada penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Bondy, J. A dan Murty, U. S. R. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London.
- [2] Chartrand dkk. 1998. On the Partition Dimension of a Graph. *Congressus Numerantium*. **130**: 157 – 168.
- [3] Chartrand, G., Salehi, E. dan Zhang, P. 2000. The Partition Dimension of Resolvability in Graphs. *Aequationes Math.* **59**: 45 – 54.
- [4] Darmaji. 2011. Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Buah Graf Terhubung. *Disertasi Program Studi Doktor Matematika ITB*, tidak diterbitkan.