BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF LOBSTER $L_{n,m,1}$ DENGAN $n = 2, 3, 4$ DAN $m = 3$

MEGA SILVIA, DES WELYYANTI, EFENDI

*Program Studi S1 Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 email: mega.silvia1668@gmail.com*

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ graf terhubung dan c suatu k -pewarnaan sejati dari G . Kelas warna pada G dinotasikan dengan S_i , merupakan himpunan titik-titik yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi v terhadap Π disebut kode warna dari v dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai vektor- k :

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π , maka c disebut pewarnaan lokasi dari G . Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi dari G dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Graf Lobster adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan 1 titik anting pada graf ulat yang berderajat 1. Graf lobster dilambangkan dengan $L(m, n, k)$ untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$, dimana n adalah banyaknya titik di lintasan utama, m adalah banyaknya titik berjarak 1 dari lintasan utama, k adalah banyaknya titik berjarak 2 dari lintasan utama. Pada tulisan ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi pada graf lobster $L_{n,m,1}$ dengan $n = 2, 3, 4$ dan $m = 3$.

Kata Kunci: Kelas warna, kode warna, bilangan kromatik lokasi, Graf Lobster

Diterima : 26 Juli 2018
 Direvisi : 17 September 2018
 Dipublikasikan : 21 Desember 2018

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang menarik untuk dikaji. Teori graf dapat diaplikasikan ke dalam berbagai bidang. Seiring berkembangnya zaman, teori graf juga berkembang. Pada teori graf, graf-graf baru yang ditemukan juga banyak keunikan-keunikan yang dapat dibahas dengan berbagai macam operasi. Keunikan teori graf salah satunya terdapat pada kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan dalam titik (*vertex*) dan sisi (*edge*).

Konsep bilangan kromatik lokasi diperkenalkan pada tahun 2002 oleh Chartrand, Erwin, Henning, Slater dan Zhang [6], sebagai pengembangan dari dua konsep dalam graf, yaitu pewarnaan titik pada graf dan dimensi partisi graf.

Pewarnaan lokasi dengan menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf sebagai berikut. Untuk graf lintasan P_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\chi_L(P_n) = 3$. Untuk graf siklus diperoleh dua hasil yaitu untuk n ganjil berlaku $\chi_L(C_n) = 3$ dan untuk n genap berlaku $\chi_L(C_n) = 4$. Selanjutnya, juga diperoleh $\chi_L(G)$ untuk graf multipartit lengkap dan dua graf bintang. Pada tahun 2003 Chartrand dkk. [7] membuktikan bahwa bilangan kromatik lokasi untuk graf G dengan orde n yang memuat graf multipartit lengkap berorde $n - 1$ sebagai subgraf. Pada tahun 2011 dan 2012, Asmiati telah menentukan bilangan kromatik lokasi untuk kelas graf pohon, yaitu graf amalgamasi bintang dan kembang api [2,3]. Penentuan bilangan kromatik lokasi dari suatu graf secara umum merupakan persoalan NP-hard [5].

Pada tahun 2013 Asmiati telah menemukan bilangan kromatik lokasi pada graf lobster $L_{n,m,1}$ untuk $m = 2$ [1]. Tapi sampai sekarang bilangan kromatik lokasi pada graf lobster $L_{n,m,1}$ untuk $m \geq 3$ belum ditemukan. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi pada graf lobster $L_{n,m,1}$ dengan $n = 2, 3, 4$ dan $m = 3$.

2. Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Graf G adalah pasangan himpunan V dan E , dituliskan $G = (V, E)$, dimana V adalah suatu himpunan titik (*vertex*) yang tidak kosong dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang terdiri dari pasangan terurut dari titik-titik berbeda dari V . Misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan titik yang berisi n titik di G dan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ adalah himpunan sisi yang berisi m sisi di G . secara umum, untuk menotasikan sisi dapat ditulis dengan $v_i v_j$ atau $v_j v_i$.

Graf Ulat adalah graf yang dibangun dari suatu graf lintasan P_n dengan menambahkan sejumlah titik anting (titik yang berderajat 1) pada setiap titik di graf lintasan tersebut, dinotasikan $C_{m,n}$, dengan m adalah jumlah titik pada graf lintasan (titik pusat) dan n adalah jumlah titik anting, untuk $m \geq 2$ dan $n = 1$.

Gambar 1. Graf ulat $C(3,3)$

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$ dengan $V(G)$ himpunan titik dan $E(G)$ himpunan sisi. Graf lobster adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan 1 titik anting pada graf ulat yang berderajat 1. Graf lobster dilambangkan dengan $L(m, n, k)$ untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$, dimana n adalah banyaknya titik di lintasan utama, m adalah banyaknya titik berjarak 1 dari lintasan utama, k adalah banyaknya titik berjarak 2 dari lintasan utama. Graf lobster $L_{n,m,1}$ yaitu, graf yang diperoleh dari n buah lintasan P_5 dengan $n \geq 2$, yang mana setiap titik tengah dari

P_5 dihubungkan oleh beberapa lintasan.

Gambar 2. Pewarnaan lokasi Graf Lobster $L_{n,m,1}$

3. Bilangan Kromatik Lokasi

Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan- k titik sejati. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$. Misalkan $\chi(G) = k$, ini berarti titik-titik di G paling kurang diwarnai dengan k warna dan tidak dapat diwarnai dengan $k-1$ warna, jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama.

Kelas warna pada G dinotasikan dengan S_i , merupakan himpunan titik-titik yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$. Berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi v terhadap Π disebut **kode warna** dari v , dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai k -vektor,

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π , maka c disebut **pewarnaan lokasi** dari G . Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut **bilangan kromatik lokasi** dari G dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Chartrand dkk.(2002) telah memberikan teorema dasar bilangan kromatik lokasi suatu graf. Teorema tersebut dijelaskan pada teorema-teorema di bawah ini. Definisikan $N(v)$ sebagai himpunan yang berisi semua titik yang menjadi tetangga dari v .

Teorema 3.1. [6] *Misal c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Jika u dan v adalah dua titik pada graf G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan*

v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = (C_1, C_2, \dots, C_k)$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i . Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π . Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus u, v$ maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Dengan demikian, $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$. $\square$

Akibat 3.2. [7] *Jika G adalah suatu graf terhubung yang memuat suatu titik yang bertetangga dengan k daun di G , maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.*

Bukti. Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G . Dari Teorema 3.1 setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna berbeda untuk setiap $x_i, i = 1, 2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i , maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i . Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k + 1$. $\square$

4. Bilangan Kromatik Lokasi Graf Lobster $L_{n,m,1}$

Pada Teorema 4.1 berikut diperoleh bilangan kromatik lokasi untuk graf Lobster $L_{n,m,1}$ dengan $n = 2, 3, 4$ dan $m = 3$.

Teorema 4.1. *Misalkan $L_{n,m,k}$ adalah graf lobster dengan $n = 2, 3, 4, m = 3$ dan $k = 1$ dengan n adalah banyaknya titik lintasan utama, m adalah banyaknya titik berjarak 1 dari lintasan utama, dan k adalah banyaknya titik berjarak 2 dari lintasan utama. Misalkan $\chi_L(L_{n,m,1})$ adalah bilangan kromatik lokasi dari graf lobster, maka*

$$\chi_L(L_{n,3,1}) = 4, \text{ untuk } n = 2, 3, 4.$$

Bukti. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi dan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ adalah partisi titik-titik pada graf $L_{n,3,1}$ dengan S_i menyatakan kelas warna ke- i untuk $1 \leq i \leq 4$. Akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf $L_{n,3,1}$.

Pandang tiga kasus sebagai berikut.

- (1) Akan ditentukan $\chi_L(L_{n,3,1}) = 4$ untuk $n = 2$.

Akan ditunjukkan $\chi_L(L_{2,3,1}) \leq 4$. Akan dilihat kode warna setiap titik di $L_{2,3,1}$ berbeda terhadap Π . Definisikan kelas warna sebagai berikut $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ dengan

$$S_1 = \{v_1, v_4, v_7, v_{21}, v_{22}, v_{121}, v_{131}\}$$

$$S_2 = \{v_2, v_{11}, v_{12}, v_{221}, v_{231}\}$$

$$S_3 = \{v_{13}, v_{23}, v_{211}\}$$

$$S_4 = \{v_{111}\}.$$

Diperoleh kode warna setiap titik di $L_{2,3,1}$ terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sebagai berikut,

Gambar 3. Pewarnaan lokasi dari Graf Lobster $L_{2,3,1}$

$$\begin{aligned}
c_{\Pi}(v_1) &= (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3), d(v_1, S_4)), \\
&= (d(v_1, v_1), d(v_1, v_{11}), d(v_1, v_{13}), d(v_1, v_{111})), \\
&= (0, 1, 1, 2), \\
c_{\Pi}(v_2) &= (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3), d(v_2, S_4)), \\
&= (d(v_2, v_{21}), d(v_2, v_2), d(v_2, v_{23}), d(v_2, v_{111})), \\
&= (1, 0, 1, 3),
\end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh juga

$$\begin{aligned}
c_{\Pi}(v_{11}) &= (1, 0, 2, 1), & c_{\Pi}(v_{22}) &= (0, 1, 2, 4), & c_{\Pi}(v_{131}) &= (0, 3, 1, 4), \\
c_{\Pi}(v_{12}) &= (1, 0, 2, 3), & c_{\Pi}(v_{23}) &= (2, 1, 0, 4), & c_{\Pi}(v_{211}) &= (1, 2, 0, 5), \\
c_{\Pi}(v_{13}) &= (1, 2, 0, 3), & c_{\Pi}(v_{111}) &= (2, 1, 3, 0), & c_{\Pi}(v_{221}) &= (1, 0, 3, 5), \\
c_{\Pi}(v_{21}) &= (0, 1, 1, 4), & c_{\Pi}(v_{121}) &= (0, 1, 3, 4), & c_{\Pi}(v_{231}) &= (3, 0, 1, 5).
\end{aligned}$$

Dari kode warna diatas, diperoleh kode warna setiap titik di $L_{2,3,1}$ terhadap Π berbeda. Jadi haruslah $\chi_L(L_{2,3,1}) \leq 4$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(L_{2,3,1}) \geq 4$. Andaikan titik-titik pada graf $L_{2,3,1}$ diberikan 3-pewarnaan titik maka akan terdapat 2 titik yang mempunyai kode warna yang sama, yaitu berdasarkan Gambar 4 diperoleh $c_{\Pi}(v_1) = (0, 1, 1) = c_{\Pi}(v_{21})$, maka haruslah graf $L_{2,3,1}$ mempunyai 4-pewarnaan titik. Akibatnya $\chi_L(L_{2,3,1}) \geq 4$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik lokasi dari graf $L_{2,3,1} = 4$.

- (2) Akan ditentukan $\chi_L(L_{n,3,1}) = 4$ untuk $n = 3$.

Akan ditunjukkan $\chi_L(L_{3,3,1}) \leq 4$.

Akan dilihat kode warna setiap titik di $L_{3,3,1}$ berbeda terhadap Π . Definisikan kelas warna sebagai berikut $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ dengan

$$S_1 = \{v_1, v_4, v_7, v_{21}, v_{22}, v_{33}, v_{121}, v_{131}, v_{311}\}$$

$$S_2 = \{v_2, v_{11}, v_{12}, v_{31}, v_{32}, v_{221}, v_{231}\}$$

$$S_3 = \{v_3, v_{13}, v_{23}, v_{211}, v_{321}, v_{331}\}$$

 Gambar 4. Pewarnaan lokasi dari Graf Lobster $L_{2,3,1}$

$S_4 = \{v_{111}\}$.

Diperoleh kode warna setiap titik di $L_{3,3,1}$ terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sebagai berikut,

 Gambar 5. Pewarnaan lokasi dari Graf Lobster $L_{3,3,1}$

$$\begin{aligned}
 c_{\Pi}(v_1) &= (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3), d(v_1, S_4)), \\
 &= (d(v_1, v_1), d(v_1, v_{11}), d(v_1, v_{13}), d(v_1, v_{111})), \\
 &= (0, 1, 1, 2), \\
 c_{\Pi}(v_2) &= (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3), d(v_2, S_4)), \\
 &= (d(v_2, v_{21}), d(v_2, v_2), d(v_2, v_{23}), d(v_2, v_{111})), \\
 &= (1, 0, 1, 3), \\
 c_{\Pi}(v_3) &= (d(v_3, S_1), d(v_3, S_2), d(v_3, S_3), d(v_3, S_4)), \\
 &= (d(v_3, v_{33}), d(v_3, v_{31}), d(v_3, v_3), d(v_3, v_{111})), \\
 &= (1, 1, 0, 4),
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh juga

$$\begin{aligned}
c_{\Pi}(v_{11}) &= (1, 0, 2, 1), & c_{\Pi}(v_{31}) &= (1, 0, 1, 5), & c_{\Pi}(v_{211}) &= (1, 2, 0, 5), \\
c_{\Pi}(v_{12}) &= (1, 0, 2, 3), & c_{\Pi}(v_{32}) &= (2, 0, 1, 5), & c_{\Pi}(v_{221}) &= (1, 0, 3, 5), \\
c_{\Pi}(v_{13}) &= (1, 2, 0, 3), & c_{\Pi}(v_{33}) &= (0, 2, 1, 5), & c_{\Pi}(v_{231}) &= (3, 0, 1, 5), \\
c_{\Pi}(v_{21}) &= (0, 1, 1, 4), & c_{\Pi}(v_{111}) &= (2, 1, 3, 0), & c_{\Pi}(v_{311}) &= (0, 1, 2, 6), \\
c_{\Pi}(v_{22}) &= (0, 1, 2, 4), & c_{\Pi}(v_{121}) &= (0, 1, 3, 4), & c_{\Pi}(v_{321}) &= (3, 1, 0, 6), \\
c_{\Pi}(v_{23}) &= (2, 1, 0, 4), & c_{\Pi}(v_{131}) &= (0, 3, 1, 4), & c_{\Pi}(v_{331}) &= (1, 3, 0, 6).
\end{aligned}$$

Dari kode warna diatas, diperoleh kode warna setiap titik di $L_{3,3,1}$ terhadap Π berbeda. Jadi haruslah $\chi_L(L_{3,3,1}) \leq 4$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(L_{3,3,1}) \geq 4$. Andaikan titik-titik pada graf $L_{3,3,1}$ diberikan 3-pewarnaan titik maka akan terdapat 2 titik yang mempunyai kode warna yang sama, yaitu berdasarkan Gambar 6 diperoleh $c_{\Pi}(v_1) = (0, 1, 1) = c_{\Pi}(v_{21})$, maka haruslah graf $L_{3,3,1}$ mempunyai 4-pewarnaan titik. Akibatnya $\chi_L(L_{3,3,1}) \geq 4$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik lokasi dari graf $L_{3,3,1} = 4$.

Gambar 6. Pewarnaan lokasi dari Graf Lobster $L_{3,3,1}$

- (3) Akan ditentukan $\chi_L(L_{n,3,1}) = 4$ untuk $n = 4$.

Akan ditunjukkan $\chi_L(L_{4,3,1}) \leq 4$.

Akan dilihat kode warna setiap titik di $L_{4,3,1}$ berbeda terhadap Π . Definisikan kelas warna sebagai berikut $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ dengan

$$S_1 = \{v_1, v_4, v_7, v_{21}, v_{22}, v_{33}, v_{121}, v_{131}, v_{311}, v_{421}, v_{431}\}$$

$$S_2 = \{v_2, v_{11}, v_{12}, v_{31}, v_{32}, v_{43}, v_{221}, v_{231}, v_{411}\}$$

$$S_3 = \{v_3, v_{13}, v_{23}, v_{41}, v_{42}, v_{211}, v_{321}, v_{331}\}$$

$$S_4 = \{v_{111}\}$$

Diperoleh kode warna setiap titik di $L_{4,3,1}$ terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sebagai berikut,

 Gambar 7. Pewarnaan lokasi dari Graf Lobster $L_{4,3,1}$

$$\begin{aligned}
 c_{\Pi}(v_1) &= (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3), d(v_1, S_4)), \\
 &= (d(v_1, v_1), d(v_1, v_{11}), d(v_1, v_{13}), d(v_1, v_{111})), \\
 &= (0, 1, 1, 2), \\
 c_{\Pi}(v_2) &= (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3), d(v_2, S_4)), \\
 &= (d(v_2, v_{21}), d(v_2, v_2), d(v_2, v_{23}), d(v_2, v_{111})), \\
 &= (1, 0, 1, 3), \\
 c_{\Pi}(v_3) &= (d(v_3, S_1), d(v_3, S_2), d(v_3, S_3), d(v_3, S_4)), \\
 &= (d(v_3, v_{33}), d(v_3, v_{31}), d(v_3, v_3), d(v_3, v_{111})), \\
 &= (1, 1, 0, 4), \\
 c_{\Pi}(v_4) &= (d(v_4, S_1), d(v_4, S_2), d(v_4, S_3), d(v_4, S_4)), \\
 &= (d(v_4, v_4), d(v_4, v_{43}), d(v_4, v_{41}), d(v_4, v_{111})), \\
 &= (0, 1, 1, 5),
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh juga

$$\begin{aligned}
 c_{\Pi}(v_{11}) &= (1, 0, 2, 1), & c_{\Pi}(v_{33}) &= (0, 2, 1, 5), & c_{\Pi}(v_{221}) &= (1, 0, 3, 5), \\
 c_{\Pi}(v_{12}) &= (1, 0, 2, 3), & c_{\Pi}(v_{41}) &= (1, 1, 0, 6), & c_{\Pi}(v_{231}) &= (3, 0, 1, 5), \\
 c_{\Pi}(v_{13}) &= (1, 2, 0, 3), & c_{\Pi}(v_{42}) &= (1, 2, 0, 6), & c_{\Pi}(v_{311}) &= (0, 1, 2, 6), \\
 c_{\Pi}(v_{21}) &= (0, 1, 1, 4), & c_{\Pi}(v_{43}) &= (1, 0, 2, 6), & c_{\Pi}(v_{321}) &= (3, 1, 0, 6), \\
 c_{\Pi}(v_{22}) &= (0, 1, 2, 4), & c_{\Pi}(v_{111}) &= (2, 1, 3, 0), & c_{\Pi}(v_{331}) &= (1, 3, 0, 6), \\
 c_{\Pi}(v_{23}) &= (2, 1, 0, 4), & c_{\Pi}(v_{121}) &= (0, 1, 3, 4), & c_{\Pi}(v_{411}) &= (2, 0, 1, 7), \\
 c_{\Pi}(v_{31}) &= (1, 0, 1, 5), & c_{\Pi}(v_{131}) &= (0, 3, 1, 4), & c_{\Pi}(v_{421}) &= (0, 3, 1, 7), \\
 c_{\Pi}(v_{32}) &= (2, 0, 1, 5), & c_{\Pi}(v_{211}) &= (1, 2, 0, 5), & c_{\Pi}(v_{431}) &= (0, 1, 3, 7),
 \end{aligned}$$

Dari kode warna diatas, diperoleh kode warna setiap titik di $L_{4,3,1}$ terhadap Π berbeda. Jadi haruslah $\chi_L(L_{4,3,1}) \leq 4$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(L_{4,3,1}) \geq 4$. Andaikan titik-titik pada graf $L_{4,3,1}$ diberikan 3-pewarnaan titik maka akan terdapat 2 titik yang mempunyai kode warna yang sama, yaitu berdasarkan Gambar 3 diperoleh $c_{\Pi}(v_1) = (0, 1, 1) = c_{\Pi}(v_{21})$, maka haruslah graf $L_{4,3,1}$ mempunyai 4-pewarnaan titik. Akibatnya $\chi_L(L_{4,3,1}) \geq 4$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik lokasi dari graf $L_{4,3,1} = 4$.

Gambar 8. Pewarnaan lokasi dari Graf Lobster $L_{4,3,1}$

□

5. Kesimpulan

Pada tugas akhir ini telah dikaji kembali tentang penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf lobster $L_{n,m,k}$. graf lobster dengan $n = 2, 3, 4$, $m = 3$ dan $k = 1$ dengan n adalah banyaknya titik lintasan utama, m adalah banyaknya titik berjarak 1 dari lintasan utama, dan k adalah banyaknya titik berjarak 2 dari lintasan utama, maka

$$\chi_L(L_{n,3,1}) = 4, \text{ untuk } n = 2, 3, 4.$$

6. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada ibu Dr. Haripamyu, ibu Dr. Ferra Yanuar, dan bapak Dr. Effendi, selaku dosen penguji, yang telah memberikan kritik dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Asmiati. 2013. Graf Lobster Berbilangan Kromatik Lokasi Empat. *Prosiding Semirata FMIPA Universitas Lampung*.
- [2] Asmiati, E.T. Baskoro, H. Assiyatun, D. Suprijanto, R. Simanjuntak and S. Uttunggadewa. 2012. The Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East J. Math. Sci.*, **63**(1) : 11 – 23.
- [3] Asmiati, H. Assiyatun and E.T. Baskoro. 2011. Locating-chromatic number of amalgamation of stars. *ITB J.Sci.*, **43A** : 1 – 8.
- [4] Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Application*. London: The Macmillan Press LTD.
- [5] Chartrand, G., dkk. 1998. On the partition dimension of graph. *Congr. Numer.*, **130** : 157 – 168.
- [6] Chartrand, G., dkk. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, **36** : 89 – 101.

- [7] Chartrand, G., dkk. 2003. Graph of order n with locating-chromatic number $n-1$. *Discrete Math.*, **269** : 65 – 79.
- [8] Syofyan, D.K., E.T. Baskoro, H. Assiyatun. 2013. On The Locating-Chromatic Number Of Homogeneous Lobsters. *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, **10**(3) : 245 – 252.