Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **3** Hal. 104 – 109
ISSN : 2303–291X

DIMENSI PARTISI DARI GRAF LOLIPOP DAN GRAF JAHANGIR DIPERUMUM

MEIZA FIQRUL HANIF, DES WELYYANTI, EFENDI
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email: Meiza.hanif77@yahoo.com

Abstrak. Dimensi partisi adalah pengelompokan semua titik di G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut [7]. Representasi dari $v \in V(G)$ terhadap himpunan Π dari $k-$vektor dapat ditulis dalam bentuk $(d(v,S_1), d(v,S_2), \cdots, d(v,S_k))$. Partisi terurut Π pada himpunan titik pada graf G merupakan partisi penyelesaian diselesaikan jika representasi titik berbeda. Minimum dari k sedemikian sehingga terdapat $k-$partisi Π pada graf G dinamakan partisi dimensi dari G, dinotasikan sebagai $pd(G)$. Dalam makalah ini, akan dibahas tentang cara penentuan dimensi partisi dari sebuah graf Lolipop dan sebuah graf Jahangir diperumum.

Kata Kunci: Representasi, Dimensi partisi, Graf Lolipop, Graf Jahangir Diperumum

Diterima	:	*26 Juli 2018*
Direvisi	:	*17 September 2018*
Dipublikasikan	:	*21 Desember 2018*

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan pokok bahasan salah satu ilmu matematika yang banyak mendapat perhatian karena model-modelnya sangat berguna untuk aplikasi yang luas, diantaranya diterapkan dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan rancangan suatu bangunan. Banyak sekali penelitian terbaru tentang graf, mulai dari jenis-jenis graf, dimensi partisi, pewarnaan lokasi, dan lain-lain.

Graf $G = (V, E)$ adalah pasangan himpunan titik $V(E)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk pada graf dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf.

Konsep dimensi partisi untuk graf terhubung pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, dkk [1]. Untuk suatu titik v dari graf terhubung G dan suatu himpunan $S \subseteq V(G)$, jarak antara v dan S didefinisikan sebagai $d(v,S) = \min\{d(v,x)|x \in S\}$. Untuk $k-$partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ dari $V(G)$, representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), \cdots, d(v,S_k))$. Jika untuk setiap u dan v di $V(G)$ berlaku $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$, maka partisi Π adalah partisi partisi penyelesaian. Banyak elemen atau anggota suatu himpunan disebut kardinalitas. Kardinalitas minimum dari partisi penyelesaian disebut dimensi partisi dari G.

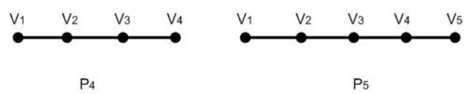
Banyak peneliti telah melakukan penelitian dalam menentukan dimensi partisi untuk spesifik kelompok graf. Tomescu [4] pada tahun 2007 menemukan dimensi partisi dari sebuah graf roda. Pada makalah ini, akan ditentukan partisi dimensi dari sebuah graf Lolipop dan sebuah graf Jahangir diperumum.

2. Terminologi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan terurut, dinotasikan dengan $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan titik tak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan sisi-sisi yang menghubungkan dua titik di graf G tersebut. Himpunan titik-titik pada graf G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi-sisinya dinotasikan dengan $E(G)$.

Lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n pada graf G adalah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, v_{n+1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \cdots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi dari graf G. **Panjang lintasan** adalah banyaknya sisi yang terdapat pada lintasan tersebut. **Jarak** dari u ke v, dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah panjang dari lintasan terpendek dari u ke v.

Graf lintasan adalah suatu graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik yang dilambangkan dengan P_n, graf lintasan dengan n titik memiliki $n-1$ sisi. Pada Gambar 1 diperlihatkan graf lintasan dengan 4 dan 5 titik.

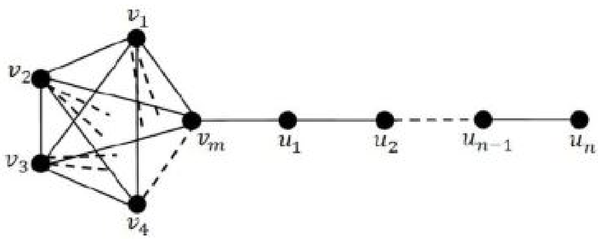


Gambar 1. Graf Lintasan P_4 dan P_5

Suatu graf G dikatakan **graf terhubung** jika untuk setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ dengan G suatu graf sederhana, terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v. **Graf Lengkap** adalah suatu graf yang setiap titiknya saling bertetangga. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. **Graf Lingkaran***(cycle)* dilambangkan dengan C_n dengan $n \geq 3$, adalah sebuah graf yang setiap titiknya berderajat dua. Banyak titik C_n sama dengan banyak sisi C_n, yaitu n. **Graf Roda** *(wheels)* adalah graf lingkaran yang setiap titiknya dihubungkan dengan satu titik ditengah lingkaran, dinotasikan dengan W_n untuk $n \geq 3$. Jika e adalah sisi dari graf G, maka $G - e$ adalah subgraf dari G yang memiliki himpunan titik yang sama seperti G dan semua sisi dari G kecuali e. suatu sisi dalam graf terhubung G disebut **Jembatan** (*bridge*), jika $G - e$ tidak terhubung.

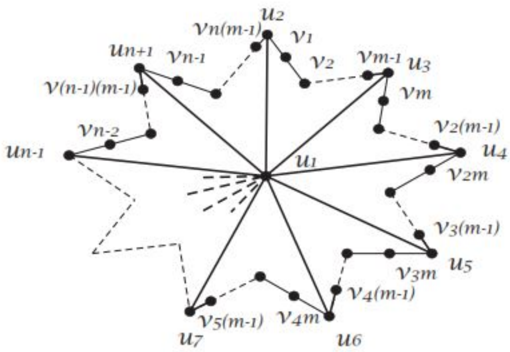
2.1. *Graf Lolipop dan Graf Jahangir Diperumum*

Weisstein [6] mendefinisikan graf lolipop sebagai suatu graf yang diperoleh dengan menggabungkan sebuah graf lengkap K_m pada sebuah lintasan P_n melalui sebuah jembatan. Penggabungan graf lengkap K_m dengan graf lintasan P_n dihubungkan di titik m pada K_m. Graf lolipop dapat dinotasikan dengan $L_{m,n}$ dimana m menyatakan banyaknya titik pada graf lengkap K_m dan n merupakan banyaknya titik pada graf lintasan P_n. Pada Gambar 2 diberikan gambar graf lolipop.



Gambar 2. Graf $L_{m,n}$

Mojdeh dan Ghameshlou [3] mendefinisikan graf Jahangir diperumum yang dinotasikan $J_{m,n}$ dengan $n \geq 3$ adalah suatu graf dengan $nm + 1$ titik yang memuat sebuah siklus C_{mn} yang mana mn adalah sebuah perkalian antara m dan n , dan satu titik tambahan yang bertetangga dengan n titik dari C_{mn}, dan masing-masing dari n titik tersebut memiliki jarak m satu sama lainnya. Misalkan $V(J_{m,n}) = V(C_{mn}) \cup \{u_1\}$ atau $V(J_{m,n}) = V(P_m) \cup V(W_n)$ dimana $V(P_m) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n(m-1)}\}$ dan $V(W_n) = \{u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}\}$, diperoleh $V(J_{m,n}) = \{u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}, v_1, v_2, \cdots, v_{n(m-1)}\}$. Pada Gambar 3 diberikan gambar graf Jahangir diperumum.



Gambar 3. Graf $J_{m,n}$

2.2. *Dimensi Partisi*

Dimensi partisi dari sebuah graf G dikenalkan oleh Chartrand, dkk [1]. Mereka mengelompokkan semua titik di G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut.Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ dan $v \in V(G)$. Representasi titik $v \in V(G)$ terhadap himpunan Π dari k-vektor, dinotasikan dengan $r(v|\Pi)$ dapat ditulis dalam bentuk $(d(v, S_1)d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k))$. Jika titik-titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut *partisi penyelesaian*. Jika untuk 2 buah titik yang berbeda terdapat $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$, maka Π disebut *partisi pembeda* dari $V(G)$. Banyak elemen atau anggota suatu himpunan disebut *kardinalitas*. Kardinalitas dari partisi penyelesaian minimum disebut *dimensi partisi* dari G. Dimensi partisi dari graf G dinotasikan dengan $pd(G)$.

Teorema 2.1. [7] *Misalkan G suatu graf terhubung dengan orde $n \geq 2$. Maka $pd(G)$=2 jika dan hanya jika G=P_n.*

Lema 2.2. [7] *Misalkan Π suatu partisi pembeda pada $V(G)$ dengan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap titik $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka u dan v termuat pada kelas partisi yang berbeda pada Π.*

3. Dimensi Partisi Graf Lolipop

Pada bab ini akan dibahas mengenai dimensi partisi dari graf lolipop yaitu, menggabungkan sebuah graf lengkap K_m pada sebuah graf lintasan P_n melalui sebuah jembatan.

Teorema 3.1. *Misalkan $L_{m,n}$ graf lolipop dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 1$ maka $pd(L_{m,n}) = m$.*

Bukti. Misalkan $L_{m,n}$ adalah graf Lolipop untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 1$ dengan himpunan titik $V(L_{m,n})$. Pandang dua kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $m = 3$ dan $n = 1$.
Akan ditunjukkkan $pd(L_{3,1}) = 3$, Yaitu dengan menunjukkan bahwa
(i) $pd(L_{3,1}) \geq 3$, Berdasarkan Teorema 2.1 dan K_3 adalah subgraf dari $L_{3,1}$.
(ii) $pd(L_{3,1}) \leq 3$, Yaitu dengan menunjukkan bahwa himpunan titik $L_{3,1}$ dibagi menjadi 3 partisi, sedemikian sehingga representasi setiap titik berbeda, maka diperoleh $pd(L_{3,1}) \leq 3$. Dari (i) dan (ii), maka $pd(L_{3,1}) = 3$.

Kasus 2. Untuk $m > 3$ dan $n > 1$.
Akan ditunjukkkan $pd(L_{m,n}) = m$, Yaitu dengan menunjukkan bahwa,
(i) $pd(L_{m,n}) \geq m$, Berdasarkan Teorema 2.1 dan K_m adalah subgraf dari $L_{m,n}$.
(ii) $pd(L_{m,n}) \leq m$, Yaitu dengan menunjukkan bahwa himpunan titik $L_{m,n}$ dibagi menjadi m partisi, sedemikian sehingga representasi setiap titik berbeda. Himpunan partisi dari $V(L_{m,n})$ dapat didefinisikan sebagai :

$$S_i = \{v_i\} \textit{ untuk } 1 \leq i \leq m\text{-}1$$
$$S_m = \{v_m, u_1, u_2, \cdots, u_i\} \textit{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Maka diperoleh $pd(L_{m,n}) \leq m$. Dari (i) dan (ii), maka $pd(L_{3,1}) = m$. □

4. Dimensi Partisi Graf Jahangir Diperumum

Pada bab ini akan dibahas mengenai dimensi partisi dari graf Jahangir diperumum yaitu suatu graf dengan $nm+1$ titik yang memuat sebuah cycle C_{mn} dan satu titik tambahan yang bertetangga dengan n titik dari C_{mn} dengan m jarak yang sama di C_{mn}.

Teorema 4.1. *Misalkan $J_{m,n}$ adalah graf Jahangir untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ maka*

$$pd(J_{m,n}) = \begin{cases} 3 & , untuk\ n = 3,4,5; \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & , untuk\ n \geq 6. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $J_{m,n}$ adalah graf Jahangir untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ dengan himpunan titik $V(J_{m,n})$. Pandang dua kasus berdasarkan nilai n.

Kasus 1. Untuk $n = 3,4,5$.
Akan ditunjukkkan $pd(J_{m,n}) = 3$, Yaitu dengan menunjukkan bahwa,
(i) $pd(J_{m,n}) \geq 3$, berdasarkan Teorema 2.1 diperoleh bahwa $pd(J_{m,n}) \geq 3$.
(ii) $pd(J_{m,n}) \leq 3$, Yaitu dengan menunjukkan bahwa himpunan titik $J_{m,n}$ dibagi menjadi 3 partisi, sedemikian sehingga representasi setiap titik berbeda, maka diperoleh $pd(J_{m,n}) \leq 3$. Dari (i) dan (ii), maka $pd(J_{m,n}) = 3$.

Kasus 2. Untuk $n \geq 6$.
Akan ditunjukkkan $pd(J_{m,n}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, Yaitu dengan menunjukkan bahwa,
(i) $pd(J_{m,n}) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, berdasarkan Teorema 2.1 diperoleh bahwa $pd(J_{m,n}) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.
(ii) $pd(J_{m,n}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, Yaitu dengan menunjukkan bahwa himpunan titik $J_{m,n}$ dibagi menjadi $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ partisi, sedemikian sehingga representasi setiap titik berbeda, maka diperoleh $pd(J_{m,n}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Dari (i) dan (ii), maka $pd(J_{m,n}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. □

5. Kesimpulan

Pada makalah ini telah dikaji kembali tentang dimensi partisi dari graf lolipop untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 1$ dan dimensi partisi dari graf Jahangir diperumum untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$.

6. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Narwen, bapak Admi Nazra, dan ibu Hazmira Yozza yang telah memberikan kritik dan saran pada penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Chartand G, Salehi E, Zhang P., 1998, On the Partition Dimension of A Graph, *Congr. Numer.* **131**: 55 – 66

[2] Darmaji, 2011, *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung*, Disertasi, tidak diterbitkan, Jurusan Matematika FMIPA ITB

[3] Mojdeh, D. A., and A. N. Ghameshlou, 2007, Domination in Jahangir Graph $J_{m,n}$, *Int. J. Contemp. Math. Sciences* **2(24)**: 193 – 199

[4] Tomescu, I., I. Javaid, and Slamin, 2007, On the Partition Dimension and Connected Partition Dimension of Wheels, *Ars Combinatoria* **84**: 311 – 317

[5] Loerdusamy. A, Samuel. S.J dan Mathivanan, 2011. On Pebbling Jahangir Graph. **Gen. Math. Notes**, 5(2) : 42 – 49

[6] Weisstein, E. W., 2003, *CRC Concise Encyclopedia oh Mathematics CD-ROM*, 2^{ed}, CRC Press, Boca Raton

[7] Chartand G, Salehi E, Zhang P., 2000, The Partition Dimension of A Graph. *Aequation Math.* **55**: 45 – 54