Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **1** Hal. 14 – 22
ISSN : 2303–291X

BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF $P_m \square P_n, K_m \square P_n$, DAN $K_m \square K_n$

MARIZA WENNI

Program Studi Matematika,
Pascasarjana Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
m_wenni@yahoo.com

Abstract. Let G and H be two connected graphs. Let c be a vertex k-coloring of a connected graph G and let $\Pi = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ be a partition of $V(G)$ into the resulting color classes. For each $v \in V(G)$, the color code of v is defined to be k-vector: $c_\Pi(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), ..., d(v, C_k))$, where $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in C_i\}$, $1 \leq i \leq k$. If distinct vertices have distinct color codes with respect to Π, then c is called a locating coloring of G. The locating chromatic number of G is the smallest natural number k such that there are locating coloring with k colors in G. The Cartesian product of graph G and H is a graph with vertex set $V(G) \times V(H)$, where two vertices (a, b) and (a', b') are adjacent whenever $a = a'$ and $bb' \in E(H)$, or $aa' \in E(G)$ and $b = b'$, denoted by $G \square H$. In this paper, we will study about the locating chromatic numbers of the cartesian product of two paths, the cartesian product of paths and complete graphs, and the cartesian product of two complete graphs.

Kata Kunci: Cartesian product, locating coloring, locating chromatic number

1. PENDAHULUAN

Misalkan G dan H dua graf terhubung yang tidak memuat sisi ganda dan juga tidak memuat *loop*, dengan himpunan titik $V(G)$ dan $V(H)$ serta himpunan sisi $E(G)$ dan $E(H)$. Pewarnaan titik pada graf G adalah suatu pemetaan $c : V \to \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $c(v) \neq c(w)$ jika v dan w bertetangga.

Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf terhubung G dengan menggunakan warna-warna $1, 2, ..., k$ untuk suatu bilangan positif k dan $\Pi = (C_1, C_2, C_3, ..., C_k)$ merupakan suatu partisi dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang saling bebas, dimana titik-titik pada C_i diberi warna i, dengan $1 \leq i \leq k$.

Untuk setiap titik $v \in V(G)$, kode warna dari titik v didefinisikan sebagai k-vektor:

$$c_\Pi(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), ..., d(v, C_k)),$$

di mana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in C_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$.

Jika setiap titik yang berbeda di G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c dikatakan pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G adalah bilangan asli terkecil k sehingga terdapat pewarnaan lokasi dengan kardinalitas k pada graf G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Matriks pewarnaan dari G adalah suatu matriks yang entri-entri $a_{i,j}, \forall\ i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$ merupakan warna dari titik-titik $v_{i,j}$ dari G. Titik $v \in V(G)$ dikatakan *colorful* jika semua warna ada pada lingkungan dari titik tersebut (kecuali titik yang bersangkutan). Warna dari titik v yang *colorful* disebut *full color*. Warna yang tidak digunakan di suatu baris atau kolom dari suatu matriks pewarnaan disebut *missing color*.

Observasi 1.1. *Misalkan G suatu graf terhubung. Jika terdapat suatu pewarnaan lokasi di G, maka tidak terdapat dua titik colorful yang ditandai dengan warna yang sama.*

Akibat 1.2. *Jika terdapat suatu pewarnaan lokasi dengan k warna di G, maka terdapat paling banyak k titik yang colorful.*

Observasi 1.3. *Misalkan G suatu graf terhubung. Jika G memuat dua clique yang terpisah dengan orde k, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.*

Perkalian kartesius dari himpunan $V(G)$ dan $V(H)$ adalah pemasangan setiap anggota $V(G)$ ke setiap anggota $V(H)$. Graf hasil kali kartesius dari graf G dan H adalah suatu graf dengan himpunan titik $V(G) \times V(H)$, di mana dua titik (a, b) dan (a', b') bertetangga jika $a = a'$ dan $bb' \in E(H)$, atau $aa' \in E(G)$ dan $b = b'$. Titik-titik dari hasil perkalian kartesius $G \Box H$ dapat direpresentasikan dengan $|V(G)| \times |V(H)|$ susunan, sedemikian sehingga subgraf yang diinduksi pada titik-titik dari setiap baris isomorfik dengan H dan subgraf yang diinduksi pada titik-titik dari setiap kolom isomorfik dengan G.

Pada makalah ini dikaji kembali tentang bilangan kromatik lokasi dari graf yang merupakan hasil kali kartesius antara dua graf lintasan, hasil kali kartesius antara graf lengkap dan graf lintasan, serta hasil kali kartesius dari dua graf lengkap.

2. BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF $P_m \Box P_n$, $K_m \Box P_n$, DAN $K_m \Box K_n$

Dalam [2], Ali Behtoei dan Behnaz Omoomi memaparkan tentang bilangan kromatik lokasi dari graf $P_m \Box P_n$ untuk $n \geq m \geq 2$, bilangan kromatik lokasi dari graf $K_m \Box P_n$ untuk $m \geq 3, n \geq 2$, dan bilangan kromatik lokasi dari graf $K_m \Box K_n$ untuk $m \geq 2, n \geq 3, m \leq n$. Pada bab ini, penulis akan mengkaji kembali tentang hasil-hasil yang telah diperoleh dari paper tersebut. Terlebih dahulu diberikan proposisi berikut.

Proposisi 2.1. *Jika G dan H dua graf terhubung, maka*

$$\chi_L(G \Box H) \ \leq \ \chi_L(G) \cdot \ \chi_L(H)$$

Pada Teorema 2.2 berikut akan ditentukan bilangan kromatik lokasi untuk graf yang merupakan hasil kali kartesius dari dua graf lintasan.

Teorema 2.2. *Jika terdapat dua bilangan bulat positif m dan n, dengan $n \geq m \geq 2$, $\chi_L(P_m \Box P_n) = 4$.*

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi graf $P_m \Box P_n$, yaitu $\chi_L(P_m \Box P_n) \geq 4$. Misal diberikan pewarnaan dengan tiga warna pada graf $P_m \Box P_n$. Pada setiap pewarnaan dengan tiga warna pada graf $P_m \Box P_n$ tersebut terdapat suatu graf siklus C_4 dengan tiga warna. Jika graf siklus C_4 diwarnai dengan tiga warna, maka akan terdapat dua titik yang berwarna sama mempunyai kode warna yang sama. Selain itu, terdapat dua titik *colorful* pada C_4 yang mempunyai warna yang sama. Akibatnya, pewarnaan dengan tiga warna pada graf $P_m \Box P_n$ bukan suatu pewarnaan lokasi. Oleh karena itu, $\chi_L(P_m \Box P_n) \geq 4$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan batas atas bilangan kromatik lokasi dari graf $P_m \Box P_n$, yaitu $\chi_L(P_m \Box P_n) \leq 4$. Untuk setiap $i \in [m]$ dan $j \in [n]$, misalkan $v_{i,j}$ suatu titik pada baris ke-i dan kolom ke-j pada graf $P_m \Box P_n$. Misalkan c pewarnaan dengan dua warna pada graf $P_m \Box P_n$ dengan himpunan warna $\{1, 2\}$. Kemudian, didefinisikan suatu pewarnaan c' sebagai $c'(v_{1,1}) = 3, c'(v_{1,n}) = 4$, dan $c'(v_{i,j}) = c(v_{i,j})$ untuk titik-titik yang lain. Untuk setiap $i \in [m]$ dan $j \in [n]$ diperoleh

$$d(v_{i,j}, v_{1,1}) = i + j - 2, \; d(v_{i,j}, v_{1,n}) = n + i - j - 1.$$

Dengan demikian, $d(v_{i,j}, v_{1,1})$ dan $d(v_{i,j}, v_{1,n})$ untuk setiap $v_{i,j}$ berbeda. Oleh karena itu, setiap titik pada graf $P_m \Box P_n$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap pewarnaan c'. Hal ini menyebabkan bahwa c' merupakan suatu pewarnaan lokasi. Sehingga diperoleh bahwa $\chi_L(P_m \Box P_n) \leq 4$. □

Pada Lema 2.3 berikut diberikan syarat untuk pewarnaan lokasi terhadap graf hasil kali Kartesius dari graf lengkap dan graf lintasan.

Lema 2.3. *Misalkan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$ dua bilangan bulat positif. Jika terdapat suatu pewarnaan lokasi dengan $(m+1)$ warna dari $G = K_m \Box P_n$ dan misalkan C suatu matriks pewarnaan dari G, maka setiap dua kolom yang berdekatan pada matriks C mempunyai missing color yang berbeda. Selain itu, jika $m \geq 5$, maka setiap kolom pada C mempunyai missing color yang berbeda.*

Pada Teorema 2.4 berikut diberikan bilangan kromatik lokasi dari graf hasil kali Kartesius dari graf lengkap dan graf lintasan.

Teorema 2.4. *Misalkan terdapat dua bilangan bulat positif m dan n, dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, maka*

$$\chi_L(K_m \Box P_n) = \begin{cases} m+2, & \text{jika } m \leq n-2, \\ m+1, & \text{jika } m \geq n-1. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $G = K_m \Box P_n$, dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Berdasarkan Observasi 3, diperoleh bahwa $\chi_L(G) \geq m+1$. Misal diberikan pewarnaan lokasi dengan $(m+2)$ warna pada graf G. Misalkan kolom pertama dari matriks pewarnaan C merupakan suatu vektor kolom

$$\left[(m+1) \; 1 \; 2 \; 3 \; ... \; (m-2) \; (m+2)\right]^T$$

dan kolom-kolom sisanya berturut-turut adalah

$$\left[1 \; 2 \; 3 \; ... \; m\right]^T \text{ dan } \left[m \; 1 \; 2 \; 3 \; ... \; (m+1)\right]^T$$

maka tidak terdapat dua titik berbeda dengan warna yang sama mempunyai jarak yang sama ke kelas-kelas warna $m+1$ dan $m+2$. Dengan demikian, ini adalah suatu pewarnaan lokasi dari G. Oleh karena itu, $\chi_L(G) = m+1$ atau $\chi_L(G) = m+2$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika $\chi_L(G) = m+1$, maka $m \geq n-1$. Oleh karena itu, jika $m \leq n-2$, maka $\chi_L(G) = m+2$. Asumsikan bahwa $\chi_L(G) = m+1$ dan misalkan C suatu matriks pewarnaan dari suatu pewarnaan lokasi dengan $(m+1)$ warna pada G. Diketahui bahwa C mempunyai m baris dan di setiap kolom terdapat tepat satu *missing color*. Berdasarkan Lema 4.3, tidak terdapat dua kolom yang berdekatan mempunyai *missing color* yang sama, dan karenanya setiap kolom di C memuat paling sedikit satu *full color*. Ini mengakibatkan bahwa G mempunyai paling banyak $(m+1)$ kolom, sehingga $n \leq m+1$ terpenuhi.

Selanjutnya, asumsikan bahwa $m \geq n-1$. Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) = m+1$. Untuk $m \in \{3,4\}$, diberikan dua matriks pewarnaan A_1 dan A_2 dari graf $K_3 \square P_4$ dan $K_4 \square P_5$ sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas diperoleh bahwa setiap dua titik dengan warna yang sama mempunyai kode warna yang berbeda. Sehingga, $\chi_L(K_3 \square P_4) = 4$ dan $\chi_L(K_4 \square P_5) = 5$. Kemudian, jika menghapus kolom-kolom dari kolom terakhir dari matriks A_1 dan A_2 tersebut, maka tidak akan membuat *full color* baru di matriks sisanya. Jadi, untuk $m \in \{3,4\}$ dan $n \leq m+1$, diperoleh $\chi_L(K_m \square P_n) = m+1$.

Selanjutnya, misalkan $m \geq 5$, dan misalkan berturut-turut $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \ 2 \ 3 \ ... \ m \end{bmatrix}^T$ dan $C_2 = \begin{bmatrix} (m+1) \ 1 \ 2 \ 3 \ ... \ (m-1) \end{bmatrix}^T$ adalah kolom pertama dan kolom kedua dari C. Asumsikan bahwa kolom ke-p dari C adalah $C_p = \begin{bmatrix} x_1 \ x_2 \ x_3 \ ... \ x_m \end{bmatrix}^T$ dengan *missing color* x_{m+1} dan tanpa mengurangi keumuman, dengan *full color* x_1, dimana $\{x_1, \ x_2, \ x_3, \ ..., \ x_{m+1}\} = \{1, \ 2, \ 3, \ ..., \ m+1\}$. Selanjutnya, akan dimuat kolom C_{p+1}. Karena C_p harus mempunyai tepat satu *full color*, maka warna x_{m+1} harus dimuat pada baris pertama dari kolom C_{p+1}.

Untuk setiap $t \geq 1$, misalkan C_t^F dan C_t^M berturut-berturut, suatu himpunan tunggal yang memuat *full color* dan *missing color* dari kolom C_t. Jika x_1 bukan *missing color* dan x_{m+1} bukan *full color* dari kolom-kolom sebelumnya, maka misalkan

$$C_{p+1} = \begin{bmatrix} x_{m+1} \ x_m \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ ... \ x_{m-1} \end{bmatrix}^T,$$

berarti $C_{p+1}^M = \{x_1\}$ dan $C_{p+1}^F = \{x_{m+1}\}$. Di sisi lain, $x_1 \in \bigcup_{t=1}^{p} C_t^M$ atau $x_{m+1} \in \bigcup_{t=1}^{p} C_t^F$. Jika $p+1 < n$, maka terdapat paling sedikit dua warna yang tidak termuat di $\bigcup_{t=1}^{p} C_t^F$ dan terdapat paling sedikit dua warna yang tidak termuat di $\bigcup_{t=1}^{p} C_t^M$. Oleh karena itu, terdapat suatu warna x_j yang tidak termuat di $\bigcup_{t=1}^{p} C_t^F$, dimana $x_j \neq x_{m+1}$. Kemudian juga, terdapat suatu warna x_i yang tidak termuat di $\bigcup_{t=1}^{p} C_t^M$, dimana x_i tidak termuat di $\{x_1, x_j\}$. Selanjutnya, pilih x_j sebagai *full color*, dan x_i sebagai *missing color* dari C_{p+1}. Karena $m \geq 5$, mungkin untuk memuat kolom C_{p+1} dengan x_{m+1} pada baris pertama dan x_j pada baris ke-i. Jika $p+1=n$, maka terdapat tepat satu warna yang tidak termuat di $\bigcup_{t=1}^{p} C_t^F$ dan tepat satu warna yang tidak termuat di $\bigcup_{t=1}^{p} C_t^M$. Berikut dua kasus yang mungkin terjadi.

Kasus 1. $[n] \setminus \bigcup_{t=1}^{n-1} C_t^M = \{x_1\}$ dan $[n] \setminus \bigcup_{t=1}^{n-1} C_t^F = \{x_i\}$, dimana $x_i \neq x_{m+1}$. Pada kasus ini, yang harus dilakukan adalah mengubah beberapa kolom sebelumnya untuk memperoleh pewarnaan yang diinginkan. Asumsikan bahwa $C_{n-2}^F = x_s$ dan $C_{n-2}^M = x_j$. Telah diketahui bahwa tidak terdapat pengulangan *full color* atau *missing color*, tetapi mungkin bahwa $x_s = x_{m+1}$ atau $x_i = x_j$.

(a) Jika $x_s \neq x_{m+1}$ dan $x_i = x_j$, maka misalkan

$$\begin{array}{lll} C_{n-2}^M = \{x_j\} & C_{n-1}^M = \{x_1\} & C_n^M = \{x_{m+1}\} \\ C_{n-2}^F = \{x_1\} & C_{n-1}^F = \{x_j\} & C_n^F = \{x_s\} \end{array}$$

Selanjutnya, muat kolom C_{n-2} sedemikian sehingga x_1 di C_{n-2} dan x_j di C_{n-3} berada di baris yang sama dan muat kolom C_{n-1} sedemikian sehingga $x_i = x_j$ di C_{n-1} dan x_1 di C_{n-2} berada di baris yang sama. Kemudian, muat kolom C_n sedemikian sehingga x_1 di C_n dan x_i di C_{n-1} berada di baris yang sama dan juga x_s di C_n dan x_{m+1} di C_{n-1} berada di baris yang sama.

(b) Jika $x_s = x_{m+1}$ dan $x_i \neq x_j$, maka misalkan

$$\begin{array}{l} C_{n-2}^M = \{x_j\},\ C_{n-1}^M = \{x_1\},\ C_n^M = \{x_s\} \\ C_{n-2}^F = \{x_i\},\ C_{n-1}^F = \{x_s\},\ C_n^F = \{x_1\}. \end{array}$$

Untuk kasus ini, dilakukan langkah-langkah yang sama seperti pada Kasus (a). Untuk kasus selanjutnya, juga dilakukan langkah-langkah yang sama seperti Kasus (a).

(c) Jika $x_s \neq x_{m+1}$ dan $x_i \neq x_j$, maka misalkan

$$\begin{array}{lll} C_{n-2}^M = \{x_j\}, & C_{n-1}^M = \{x_{m+1}\}, & C_n^M = \{x_1\} \\ C_{n-2}^F = \{x_1\}, & C_{n-1}^F = \{x_s\}, & C_n^F = \{x_i\} \end{array}$$

(d) Jika $x_s = x_{m+1}$ dan $x_i = x_j$, asumsikan bahwa $C_{n-3}^F = \{x_l\}$ dan $C_{n-3}^M = \{x_k\}$. Perlu untuk diingat bahwa $\{x_l\}$ tidak termuat di $\{x_1,\ x_i,\ x_{m+1}\}$ dan $\{x_k\}$ tidak termuat di $\{x_1,\ x_i,\ x_{m+1}\}$. Untuk memperoleh pewarnaan yang diinginkan, misalkan

$$\begin{array}{llll} C_{n-3}^M = \{x_1\}, & C_{n-2}^M = \{x_k\}, & C_{n-1}^M = \{x_i\}, & C_n^M = \{x_{m+1}\} \\ C_{n-3}^F = \{x_i\}, & C_{n-2}^F = \{x_{m+1}\}, & C_{n-1}^F = \{x_1\}, & C_n^F = \{x_l\} \end{array}$$

Kasus 2. $[n] \setminus \bigcup_{t=1}^{n-1} C_t^M = \{x_i\}$ dan $[n] \setminus \bigcup_{t=1}^{n-1} C_t^F = \{x_{m+1}\}$, dimana $x_i \neq x_1$. Pada kasus ini, yang harus dilakukan adalah mengganti kolom C_{n-2} untuk mendapatkan pewarnaan yang diinginkan. Asumsikan bahwa $C_{n-2}^F = x_s$ dan $C_{n-2}^M = x_j$. Perlu untuk diingat bahwa x_j tidak termuat di $\{x_1, x_i, x_{m+1}\}$ dan x_s tidak termuat di $\{x_1, x_{m+1}\}$, karena tidak terdapat pengulangan *full color* atau *missing color*. Tetapi mungkin bahwa $x_i = x_s$.

(a) Jika $x_i \neq x_s$, maka misalkan

$$C^M_{n-2} = \{x_j\}, \quad C^M_{n-1} = \{x_i\}, C^M_n = \{x_{m+1}\}$$
$$C^F_{n-2} = \{x_{m+1}\}, C^F_{n-1} = \{x_1\}, \quad C^F_n = \{x_s\}$$

Selanjutnya, muat kolom C_{n-2} sedemikian sehingga x_{m+1} di C_{n-2} dan x_j di C_{n-3} berada di baris yang sama. Kemudian, muat kolom C_{n-1} sedemikian sehingga x_j di C_{n-1} dan x_{m+1} di C_{n-2} berada di baris yang sama dan juga x_1 di C_{n-1} dan x_i di C_{n-2} berada di baris yang sama. Kemudian, muat kolom C_n sedemikian sehingga x_i di C_n dan x_1 di C_{n-1} berada di baris yang sama dan x_s di C_n dan x_{m+1} di C_{n-1} berada di baris yang sama.

(b) Jika $x_i = x_s$, maka misalkan

$$C^M_{n-2} = \{x_j\}, C^M_{n-1} = \{x_{m+1}\}, \quad C^M_n = \{x_s\}$$
$$C^F_{n-2} = \{x_1\}, \quad C^F_{n-1} = \{x_s\}, \quad C^F_n = \{x_{m+1}\}$$

Perlu untuk diingat bahwa karena $m \geq 5$, di semua langkah-langkah sebelumnya mungkin untuk memuat setiap kolom dengan cara yang diinginkan. □

Lema 2.5. *Misalkan $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ dua bilangan bulat positif, dimana $m \leq n$. Jika terdapat suatu pewarnaan lokasi dengan $(n+1)$ warna dari $G = K_m \Box K_n$, maka baris-baris berbeda dari C mempunyai missing color yang berbeda.*

Teorema 2.6. *Untuk dua bilangan bulat positif m dan n, dengan $m \geq 2$, $n \geq 3$, dan $m \leq n$, misalkan $m_0 = max\{k | k \in \mathbb{N}, k(k-1) - 1 \leq n\}$.*

(1) Jika $m \leq m_0 - 1$, maka $\chi_L(K_m \Box K_n) = n + 1$.
(2) Jika $m_0 + 1 \leq m \leq \frac{n}{2}$, maka $\chi_L(K_m \Box K_n) = n + 2$.

Bukti. Misalkan $G = K_m \Box K_n$, dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, di mana $m \leq n$. Berdasarkan Observasi 1.3, diperoleh bahwa $\chi_L(G) \geq n+1$. Jika $m = 2$, maka matriks berikut memberikan suatu pewarnaan lokasi dengan $(n+1)$ warna dari G, dengan himpunan warna $[n+1]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & n \\ n+1 & 1 & 2 \ldots & n-1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $m = 3$. Jika $n = 3$, maka tidak terdapat pewarnaan lokasi dengan 4 warna dari $K_3 \Box K_3$. Berdasarkan Lema 5 bahwa baris-baris berbeda mempunyai *missing color* yang berbeda, sehingga *missing color-missing color* tersebut akan termuat di dua baris yang lain. Akibatnya, setiap baris memuat tepat dua *full color*. Oleh karena itu, terdapat enam *full color* di empat kelas warna pada pewarnaan ini. Dengan kata lain, terdapat pengulangan *full color*, sehingga pewarnaan ini bukanlah suatu pewarnaan lokasi. Matriks A_1 berikut memberikan suatu pewarnaan lokasi dengan lima warna pada graf $K_3 \Box K_3$. Oleh karena itu, $\chi_L(K_3 \Box K_3) = 5$.

Jika $n = 4$, maka tidak terdapat pewarnaan lokasi dengan 5 warna dari $K_3 \Box K_4$. Hal ini disebabkan karena setiap baris mempunyai *missing color* yang berbeda, sehingga *missing color-missing color* tersebut akan termuat di dua baris yang lain. Akibatnya, setiap baris memuat tepat dua *full color*. Oleh karena itu, terdapat enam *full color*. Dengan demikian, pewarnaan dengan lima warna bukanlah suatu pewarnaan lokasi. Matriks A_2 berikut memberikan suatu pewarnaan lokasi dengan enam warna pada $K_3 \square K_4$, dan oleh karena itu $\chi_L(K_3 \square K_4) = 6$. Jika $n = 5$, maka matriks A_3 memberikan suatu pewarnaan lokasi dengan enam warna pada $K_3 \square K_5$, dan akibatnya $\chi_L(K_3 \square K_5) = 6$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 4\ 1\ 2 \\ 2\ 5\ 4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 5\ 1\ 2\ 3 \\ 6\ 5\ 1\ 2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1\ 5\ 3\ 4\ 2 \\ 6\ 1\ 5\ 2\ 4 \\ 3\ 4\ 2\ 5\ 6 \end{bmatrix}$$

Matriks berikut memberikan suatu pewarnaan lokasi dengan $(n+1)$ warna dari $n \geq 6$, dan akibatnya $\chi_L(K_3 \square K_n) = n + 1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots n-2 & n-1 & n \\ n+1 & 1 & 2 \ldots n-3 & n-2 & n-1 \\ 2 & 3 & 4 \ldots n-1 & n & n+1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, misalkan $m \geq 4$. Asumsikan bahwa terdapat suatu pewarnaan lokasi dengan $(n+1)$ warna dari G dengan suatu matriks pewarnaan C. Berdasarkan Lema 5, *missing color* dari setiap baris berbeda, dan *missing color* dari setiap baris termuat di $(m-1)$ baris yang lain. Akibatnya, setiap baris dari C memuat tepat $(m-1)$ *full color*, dan terdapat tepat $m(m-1)$ *full color* di C. Karena terdapat $n+1$ kelas warna, maka haruslah $m(m-1) \leq n+1$.

Misal diberikan suatu pewarnaan lokasi dengan $(n+2)$ warna pada graf G, untuk $m_0 + 1 \leq m \leq \frac{n}{2}$. Misalkan $c : V(G) \rightarrow [n+2]$ adalah suatu fungsi, dimana $c(v_{i,j}) = ((i-1)n+j) mod (n+2)$. Untuk setiap $i, 1 \leq i \leq m$, baris ke-i dari matriks pewarnaan C mempunyai dua *missing color*, yaitu $in+1$ dan $in+2$, modulo $n+2$. Selain itu, dua warna $in+1$ dan $in+2$ tidak termuat di kolom yang sama. Ini berarti bahwa tidak terdapat *full color*. Dengan kata lain, setiap titik mempunyai paling sedikit satu komponen yang bernilai 2 pada kode warnanya. Karena setiap *missing color* berada di tepat satu baris, maka setiap dua titik dengan warna sama termuat pada baris yang berbeda dan mempunyai kode warna yang berbeda juga. Akibatnya, c adalah suatu pewarnaan lokasi dengan $(n+2)$ warna. Oleh karena itu, $\chi_L(G) = n+2$, untuk $m_0 < m \leq \frac{n}{2}$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) = n+1$, untuk $m < m_0$. Misal diberikan suatu pewarnaan lokasi dengan $(n+1)$ warna dari $K_m \square K_n$. Akan dibuat suatu matriks pewarnaan berukuran $m \times n$ dengan himpunan warna $[n+1]$.

Berikut ini diberikan matriks pewarnaan dari $K_m \square K_n$ untuk $m = 4$, $m_0 \geq 5$, dan $n \geq 19$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & i & \ldots n-4 & n-3 & n-2 & n-1 & n \\ n+1 & 1 & 2 & 3 \ldots & i-1 & \ldots n-5 & n-4 & n-3 & n-2 & n-1 \\ n & n+1 & 1 & 2 \ldots & i-2 & \ldots n-6 & n-5 & n-4 & n-3 & n-2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \ldots & i+3 & \ldots n-1 & n & 2 & 3 & n+1 \end{bmatrix}$$

Andaikan bahwa baris ke-i, $4 < i \leq m-1$, telah dilengkapi sedemikian sehingga sifat-sifat (a) sampai (d) terpenuhi untuk matriks berukuran $i \times n$ yang telah dibuat. Selanjutnya, yang akan dilakukan adalah melengkapi baris ke-$(i+1)$. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan bahwa *missing color* pada i baris pertama adalah

$1, 2, ..., i$. Setiap baris dari i baris pertama memuat $i-1$ *full color*, karena *missing color*nya termuat di baris-baris yang lain. Dengan demikian, terdapat $i(i-1)$ *full color* dan i *missing color*. Pilih suatu *full color* j, dengan $j > i$. Akan dimuat entri-entri pada baris ke-$(i+1)$ dengan warna di himpunan $[n+1]\backslash\{j\}$ sedemikian sehingga terbentuk matriks berukuran $(i+1) \times n$ yang memenuhi sifat-sifat (a) sampai (d).

Dengan melengkapi baris ke-$(i+1)$, akan muncul $2i$ titik *colorful* baru, dimana sebanyak i termuat pada i baris pertama (satu titik pada setiap baris) dengan memuat warna $1, 2, ..., i$ pada baris ke-$(i+1)$, dan sebanyak i termuat pada baris ke-$(i+1)$ yang bersesuaian dengan kolom-kolom yang memuat j pada baris-baris sebelumnya.

Misalkan $1 \leq k \leq i$. Warna k harus dimuat di suatu kolom yang sesuai pada baris ke-$(i+1)$, sedemikian sehingga membentuk suatu *full color* baru pada baris ke-k. Karena warna $1, 2, ..., i$ adalah *full color*, untuk menjaga sifat (c), warna-warna ini tidak boleh dimuat di kolom-kolom yang bersesuaian dengan warna j di baris-baris sebelumnya pada baris ke-$(i+1)$. Terdapat $n-i$ kolom yang tidak memuat j. Di sisi lain, $i(i-1)$ *full color* dari i baris pertama ada di baris ke-k dan dengan memasukkan k ke kolom-kolom yang bersesuaian dengan *full color* tersebut menyebabkan pengulangan *full color*. Juga, satu dari *full color* ini adalah j dan setiap kolom yang memuat k memuat paling sedikit satu *full color*. Dengan demikian, terdapat paling sedikit $(n-i) - i(i-1) + 1 = n - i^2 + 1$ kolom-kolom yang mungkin untuk memasukkan warna k pada baris ke-$(i+1)$. Asumsikan bahwa warna 1 telah dimasukkan pada suatu kolom yang sesuai. Setelah memasukkan warna 1, satu *full color* yang baru dibuat pada baris pertama dan satu dari kolom-kolom yang mungkin dari baris ke-$(i+1)$ ditempati oleh warna 1. Akibatnya, untuk memasukkan warna 2 terdapat paling sedikit $(n - i^2 + 1) - 2$ kemungkinan kolom, dan akhirnya untuk memasukkan i terdapat paling sedikit $(n - i^2 + 1) - 2(i-1)$ kemungkinan kolom. Diketahui bahwa $(n - i^2 + 1) - 2(i-1) \geq 1$, karena $i < m < m_0$ dan $m_0(m_0 - 1) - 1 \leq n$. Dengan demikian, mungkin untuk memasukkan warna $1, 2, ..., i$ seperti yang diinginkan.

Memasukkan setiap warna di kolom-kolom yang bersesuaian dengan warna j pada baris-baris sebelumnya, akan membuat warna tersebut menjadi *full color*. Terdapat i kolom yang memuat warna j. Karena

$$\begin{aligned}(n+1) - i(i-1) - i &= n + 1 - i^2 \\ &\geq m_0(m_0 - 1) - i^2 \\ &\geq m_0(m_0 - 1) - (m_0 - 2)^2 \\ &= 3(m_0 - 2) + 2 \\ &\geq 3i + 2,\end{aligned}$$

maka terdapat paling sedikit $3i + 2$ non *full color*. Oleh karena itu, mungkin untuk memasukkan i buah non *full color* pada baris ke-$(i+1)$ dan pada kolom dimana j terjadi pada i baris pertama, untuk menjaga sifat (a).

Selanjutnya, yang akan dilakukan adalah memuat $n - 2i$ warna yang tersisa, sebut $c_1,\ c_2,\ ...,\ c_{n-2i}$ pada $n - 2i$ kolom sisa, sebut $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_{n-2i}$. Misalkan

$H = (X, Y)$ suatu graf bipartit dengan himpunan partit,

$$X = \{C_1,\ C_2,\ ...,\ C_{n-2i}\}\text{dan}Y = \{c_1,\ c_2,\ ...,\ c_{n-2i}\}$$

sedemikian sehingga $C_s c_r \in E(H)$, kapanpun warna c_r tidak termuat di kolom C_s. Setiap warna c_r termuat di i baris dan setiap kolom C_s memuat i warna. Dengan demikian, setiap titik di H mempunyai derajat paling sedikit $n - 3i$. Misalkan $\emptyset \subset S \subset X$. Karena $S \neq \emptyset$, $|N(S)| \geq n - 3i$. Jika $|N(S)| < |S|$, maka $n - 3i < |S|$. Dengan demikian, $N(S) \neq Y$ dan $|X \backslash S| \leq i - 1$. Misalkan $y \in Y \backslash N(S)$ dan akibatnya,

$$n - 3i \leq |N(y)| \leq |X \backslash S| \leq i - 1.$$

Dengan demikian, $n \leq 4i - 1$ dan

$$m_0(m_0 - 1) - 1 \leq 4i - 1 \leq 4(m_0 - 1) - 1.$$

Ini mengakibatkan bahwa $m_0 \leq 4$, sehingga kontradiksi dengan $4 \leq m \leq m_0$. Oleh karena itu, berlaku *Hall's condition* dan akibatnya H mempunyai suatu *perfect matching*. Sehingga, diperoleh suatu pewarnaan yang diinginkan dengan memuat entri-entri sisanya berdasarkan penjelasan ini. □

Daftar Pustaka

[1] Asmiati, H. Assiyatun, dan E.T. Baskoro. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J. Sci.* 43: 1-8.

[2] Behtoei, A. dan B. Omoomi. 2011. On the Locating Chromatic Number of the Cartesian Product of Graphs. *arxiv.org/abs/1106.3453.*

[3] Chartrand, G., dkk. 2002. The Locating-Chromatic Number of A Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* 36: 89-101.

[4] Chartrand, G., dkk. 2003. Graphs of Order n with Locating-Chromatic Number $n - 1$. *Discrete Math.* 269: 65-79.

[5] Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1994. **Pearls in Graph Theory : A Comprehensive Introduction, Revised and Augmented**. Academic Press: San Diego.

[6] Husodo, A. Y. Tanpa Tahun. **Aplikasi Pewarnaan Graf dalam Penyimpanan Senyawa Kimia Berbahaya**. ITB, Bandung.

[7] Suryanaga, Bobby H. 2009. Beberapa Aplikasi Graf. Makalah IF2091 Struktur Diskrit ITB, Bandung.

[8] West, D. B. 2001. **Introduction to Graph Theory**. Pearson Education, Inc.