Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **3** Hal. 144 – 148
ISSN : 2303–291X

SIFAT-SIFAT KOMPLEKS DAN SUB GRUP SERTA HUBUNGAN KEDUANYA

RIFQI DIKA HAMANA
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email: okirifqi@yahoo.com

Abstrak. Pada makalah ini dijelaskan tentang sifat-sifat kompleks, sifat-sifat sub grup, hubungan antara kompleks dan sub grup, sifat sub grup komutator dan sifat sub grup normal maksimal. Sifat-sifat tersebut dinyatakan dalam beberapa teorema.

Kata Kunci: Grup, Kompleks, Sub Grup, Komutator, Sub Grup Normal

Diterima	:	*26 Juli 2018*
Direvisi	:	*17 September 2018*
Dipublikasikan	:	*21 Desember 2018*

1. Pendahuluan

Dalam teori aljabar abstrak dikenal adanya teori tentang grup. Secara umum grup merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma, yaitu bersifat tertutup terhadap operasi biner tersebut, bersifat asosiatif, terdapat secara tunggal elemen identitas dari grup tersebut dan setiap elemennya memiliki invers yang tunggal terhadap operasi biner tersebut. Jika berlaku sifat komutatif pada suatu grup, maka grup tersebut dinamakan grup abelian (grup komutatif).

Grup merupakan suatu himpunan sehingga grup memiliki subset, subset tak kosong dari suatu grup dinamakan kompleks. Kompleks dapat berupa sub grup maupun bukan sub grup. Misalkan G suatu grup, kompleks dari G merupakan sub grup jika kompleks tersebut memenuhi aksioma-aksioma dari grup terhadap operasi yang didefinisikan di G.

Elemen suatu grup yang diperoleh dari operasi biner $aba - 1b - 1$ dinamakan komutator dari pasangan terurut (a, b), dimana a dan b adalah elemen dari grup tersebut. Sub grup terkecil dari suatu grup yang memuat himpunan yang mengandung semua komutator dari grupnya dinamakan sub grup komutator.

Salah satu jenis sub grup adalah sub grup normal. Sub grup normal yang merupakan himpunan bagian sejati dari suatu grup yang tidak terkandung pada setiap sub grup normal pada grup tersebut dinamakan sub grup normal maksimal.

2. Landasan Teori

2.1. *Grup, Kompleks dan Sub Grup*

Definisi 2.1. [5] *Misalkan G suatu himpunan yang tak kosong dan $*$ suatu operasi biner yang didefinisikan di G. G disebut grup terhadap operasi $*$ yang dilambangkan dengan $(G, *)$ jika memenuhi ke empat syarat berikut.*

(i) Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a*b \in G$ (bersifat tutup terhadap operasi $*$).
(ii) Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a*(b*c) = (a*b)*c$ (bersifat asosiatif terhadap operasi $*$).
(iii) Terdapat suatu unsur di G yang dilambangkan dg e sehingga $a*e = e*a = a$ untuk setiap $a \in G$ (G memiliki unsur identitas terhadap operasi $*$).
(iv) Untuk setiap $a \in G$ ada $b \in G$ sehingga $a*b = b*a = e$ (setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi $*$).

Definisi 2.2. [5] *Misalkan $(G, *)$ suatu grup. Grup G disebut abelian/komutatif jika setiap a, $b \in G$ berlaku $a*b = b*a$.*

Definisi 2.3. [5] *Misalkan G suatu grup. H disebut kompleks dari G jika $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$.*

Definisi 2.4. [5] *Misalkan G suatu grup dan H adalah suatu kompleks dari G. Kompleks dari G yang anggotanya invers-invers dari anggota H dinamakan invers dari H dinotasikan dengan H^{-1}.*

$$H^{-1} = \{h^{-1} : h \in H\}.$$

Definisi 2.5. [5] *Misalkan $(G, *)$ suatu grup dan $H \subseteq G$ dengan $H \neq \emptyset$. H disebut sub grup dari G jika dan hanya jika*

(i) Setiap $a, b \in H$ berlaku $a*b \in H$.
(ii) Setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

Definisi 2.6. [3] *Misalkan M adalah kompleks dari G. Maka sub grup H dari G disebut sub grup terkecil dari G yang mengandung kompleks M jika H mengandung M dan H terkandung di setiap sub grup dari G yang mengandung M. Sub grup terkecil dari G yang mengandung M disebut juga sub grup yang dihasilkan oleh M dan dinotasikan dengan $\langle M \rangle$.*

Definisi 2.7. [5] *Misalkan G suatu grup dan N adalah sub grup dari G. Himpunan N disebut sub grup normal dari G jika setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku $gng^{-1} \in N$.*

Definisi 2.8. [3] *Misalkan G suatu grup dan H sub grup normal dari G. Himpunan semua koset H di G dinamakan grup kuosien dan dinotasikan dengan G/H, yaitu*

$$G/H = \{Ha : a \in G\} = \{aH : a \in G\}.$$

2.2. *Permutasi*

Definisi 2.9. [3] *Misalkan H adalah suatu himpunan yang anggotanya terdiri dari a_i; i = 1, ..., n Pemetaan satu-satu dari H ke H dinamakan permutasi.*

Definisi 2.10. [3] *Himpunan yang terdiri dari $n!$ permutasi berderajat n yang berbeda disebut himpunan simetrik dari permutasi bererajat n dan dinotasikan sebagai P_n .*

Definisi 2.11. [3] *Misalkan P_n suatu grup yang merupakan suatu himpunan simetrik dengan operasi binernya komposisi dari permutasi-permutasi yang ada di P_n, maka P_n dinamakan grup permutasi/grup simetrik.*

3. Kompleks dan Sub Grup pada Grup

3.1. *Kompleks dan Sub Grup*

Teorema 3.1. [3] *Misalkan G suatu grup dan H, K masing-masing suatu kompleks dari G maka :*

$$HK = \{hk : h \in H \text{ dan } k \in K\} \Rightarrow HK \subseteq G.$$

Teorema 3.2. [3] *Perkalian kompleks tidak selalu komutatif.*

Teorema 3.3. [3] *Jika H, K dan L adalah tiga kompleks dari grup G maka*

$$H(K \cup L) = HK \cup HL.$$

Teorema 3.4. [3] *Jika H, K dan L adalah suatu kompleks dari grup G, maka*

$$H(K \cap L) \subset HK \cap HL.$$

Teorema 3.5. [3] *Jika H, K dan L adalah suatu kompleks dari grup G, maka*

$$H(K \cap L) \neq HK \cap HL.$$

Teorema 3.6. [3] *Misalkan G suatu grup dan H, K masing-masing suatu kompleks dari G maka $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$.*

Teorema 3.7. [3] *Jika H adalah sub grup dari grup G, maka $H^{-1} = H$.*

Teorema 3.8. [3] *Syarat perlu dan cukup agar kompleks H dari grup G menjadi sub grup adalah $HH^{-1} = H$.*

Teorema 3.9. [3] *Jika H dan K adalah sub grup dari grup G, maka HK adalah sub grup dari G, jika dan hanya jika $HK = KH$.*

Teorema 3.10. [3] *Jika H dan K adalah sub grup dari grup abelian G, maka HK juga sub grup dari G.*

Teorema 3.11. [3] *Syarat perlu dan syarat cukup untuk kompleks H dari grup hingga agar menjadi sub grup adalah $HH = H$.*

Teorema 3.12. [3] *Misalkan M adalah kompleks dari grup G. Maka sub grup terkecil yang mengandung M ada dan tunggal..*

3.2. *Sub Grup Komutator*

Teorema 3.13. [3] *Misalkan G suatu grup dan $a, b \in G$. Misalkan (a, b) adalah suatu pasangan terurut. Komutator dari (a, b) adalah elemen identitas dari grup G jika dan hanya jika $ab = ba$.*

Teorema 3.14. [3] *Misalkan $G*$ adalah sub grup komutator dari grup G. Maka :*

(i) $G*$ adalah sub grup normal di G.
(ii) $G \setminus G*$ Abelian.
(iii) Misalkan H sub grup normal dari G. Grup kuosien G/H adalah Abelian jika dan hanya jika $G* \subseteq H$.

3.3. *Sub Grup Normal Maksimal*

Teorema 3.15. [3] *Misalkan G suatu grup, H sub grup normal maksimal dari G jika dan hanya jika grup kuosien G/H sederhana.*

4. Kesimpulan

Sifat Kompleks dan Sub Grup :

(1) Misalkan G suatu grup dan H, K masing-masing suatu kompleks dari G maka : $HK = \{hk \mid h \in H \text{ dan } k \in K\} \Rightarrow HK \subseteq G$.
(2) Perkalian kompleks tidak selalu komutatif.
(3) Jika H, K dan L adalah tiga kompleks dari grup G maka $H(K \cup L) = HK \cup HL$.
(4) Jika H, K dan L adalah suatu kompleks dari grup G, maka $H(K \cap L) \subset HK \cap HL$.
(5) Jika H, K dan L adalah suatu kompleks dari grup G, maka $H(K \cap L) \neq HK \cap HL$.
(6) Misalkan G suatu grup dan H, K masing-masing suatu kompleks dari G maka $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$.
(7) Jika H adalah sub grup dari grup G, maka $H^{-1} = H$.
(8) Syarat perlu dan cukup agar kompleks H dari grup G menjadi sub grup adalah $HH^{-1} = H$.
(9) Jika H dan K adalah sub grup dari grup G, maka HK adalah sub grup dari G, jika dan hanya jika $HK = KH$.
(10) Syarat perlu dan syarat cukup untuk kompleks H dari grup hingga agar menjadi sub grup adalah, $HH = H$.
(11) Misalkan M adalah kompleks dari grup G. Maka sub grup terkecil yang mengandung M ada dan tunggal.

Sifat komutator :

(1) Misalkan G suatu grup dan $a, b \in G$. Misalkan (a, b) adalah suatu pasangan terurut. Komutator dari (a, b) adalah elemen identitas dari grup G jika dan hanya jika $ab = ba$.
(2) Misalkan $G*$ adalah komutator sub grup dari grup G. Maka :

(a) $G*$ adalah normal di G.
(b) $G \setminus G*$ Abelian.
(c) Grup kuosien G/H adalah Abelian jika dan hanya jika $G* \subseteq H$.

(3) Misalkan G suatu grup, H sub grup normal maksimal dari G jika dan hanya jika grup kuosien G/H sederhana.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. I Made Arnawa, Ibu Dr. Yanita, Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, Ibu Dr. Susila Bahri dan Ibu Dr. Maiyastri yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Arifin, A. 2000. *Aljabar*. ITB, Bandung
[2] Arnawa, I. tanpa tahun. *Pengantar Aljabar Abstrak*, Padang
[3] Angarwal, R.S. and M.D. Raisinghania. 1980. *Modern Algebra*. S. Chad & Company LTD, New Delhi
[4] Bhambri, S.K. and V.K. Khanna. 1993. *A Course in Abstract Algebra*. Vicas Publishing House PVT LTD, New Delhi
[5] Herstein, I.N. 2000. *Topics in Algebra*. Jhon Wiley & Sons, Singapore