DIMENSI METRIK GRAF KINCIR POLA $K_1 + mK_4$

RIFQHI RIYANDHO, NARWEN, EFENDI

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 email: Rifqhyrd@gmail.com*

Abstrak. Dimensi metrik pada suatu graf G dapat dinotasikan dengan $\dim(G)$, dimana dimensi metrik adalah kardinalitas minimum dari semua kardinalitas dari semua himpunan pemisah pada G . Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Jika subhimpunan terurut pada $W \subseteq V(G)$ dengan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, dan $v \in V(G)$ sehingga diperoleh representasi dari titik v terhadap W yang didefinisikan sebagai pasangan- k terurut $(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$ dan dinotasikan dengan $r(v|W)$. Jika untuk setiap dua titik yang berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut himpunan pembeda dari $V(G)$. Himpunan pembeda W dengan kardinalitas minimum disebut dengan himpunan pembeda minimum. Pada artikel ini penulis tertarik untuk membahas untuk menentukan dimensi metrik dari graf kincir dengan pola $K_1 + mK_4$.

Kata Kunci: Representasi, Dimensi Metrik, Graf Kincir

Diterima : 26 Juli 2018
 Direvisi : 17 September 2018
 Dipublikasikan : 21 Desember 2018

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan pokok bahasan salah satu ilmu matematika yang banyak mendapat perhatian karena model-modelnya sangat berguna untuk aplikasi yang luas, diantaranya diterapkan dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan rancangan suatu bangunan. Banyak sekali penelitian terbaru tentang graf, mulai dari jenis-jenis graf, dimensi partisi, pewarnaan lokasi, dan lain-lain.

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, dimana dalam hal ini V adalah himpunan berhingga tak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan sisi-sisi yang menghubungkan dua titik di graf G tersebut. Salah satu topik dalam teori graf adalah dimensi metrik. Konsep dimensi metrik pertama kali diperkenalkan pada tahun 1976 oleh F. Harary dan R. A. Melter [2] pada jurnal yang berjudul *on the metric dimension of a graph*. Konsep dimensi metrik ini muncul yaitu dengan memperoleh himpunan pembeda (dan himpunan pembeda minimum). Selanjutnya, Slater menyatakan bahwa himpunan pembeda pada W sebagai titik-titik di graf G sedemikian hingga untuk setiap titik di G diperoleh jarak yang berbeda terhadap setiap titik di W . Dimensi metrik juga disebut sebagai kardinalitas minimum dari himpunan pembeda di W .

Dari hasil-hasil terdahulu mengenai dimensi metrik telah diketahui untuk beberapa jenis graf, salah satu diantaranya graf roda dan graf lingkaran. Misalnya, Buczkowski pada tahun 2003 menemukan dimensi metrik dari graf roda W_n dengan $n \leq 3$. Sementara Wahyudi Suhud [1] menemukan dimensi metrik dari graf $K_1 + mK_3$. Pada skripsi ini penulis tertarik untuk membahas untuk menentukan dimensi metrik dari graf kincir dengan pola $K_1 + mK_4$.

2. Terminologi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan terurut, dinotasikan dengan $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan titik tak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan sisi-sisi yang menghubungkan dua titik di graf G tersebut. Himpunan titik-titik pada graf G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi-sisinya dinotasikan dengan $E(G)$.

Suatu graf G dikatakan **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v .

Gambar 1. Graf terhubung

Dua buah titik pada graf tak berarah G dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G . Untuk sebarang sisi $e = (u, v)$, sisi e dikatakan **bersisian** dengan titik u dan titik v . Sisi $e = (u, v)$ sering ditulis uv . Dalam hal ini, sisi e dikatakan terkait dengan titik u dan v . Sebaliknya, titik u dan v juga dikatakan terkait dengan sisi e .

Suatu sisi e disebut **loop** jika $e = vv$ untuk setiap $v \in V(G)$. Jika dua sisi atau lebih terkait dengan sepasang titik yang sama, maka sisi-sisi tersebut disebut **sisi ganda** (*multiple edge*). Suatu graf G dikatakan **graf sederhana** jika $E(G)$ tidak memuat *loop* atau sisi ganda.

Lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n pada graf G adalah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n+1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G . **Sirkuit** dari suatu graf G adalah merupakan lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama. **Graf lintasan** adalah suatu graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik yang dilambangkan dengan P_n , graf lintasan dengan n titik memiliki $n - 1$ sisi. Pada Gambar 2 diperlihatkan graf lintasan dengan 4 dan 5 titik.

Graf Lengkap adalah suatu graf yang setiap titiknya saling bertetangga. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Banyak sisi pada graf

Gambar 2. Graf Lintasan P_4 dan P_5

lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $n \frac{n-1}{2}$.

Graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf pohon yang mempunyai satu titik berderajat n dan n titik berderajat satu. Graf bintang dengan $n+1$ titik dinotasikan dengan $K_{1,n}$. Contoh graf bintang diberikan pada Gambar 3.

Gambar 3. Graf Bintang $K_{1,n}$

Panjang lintasan adalah banyaknya sisi yang terdapat pada lintasan tersebut. Lintasan dari v_0 ke v_n dapat ditulis sebagai lintasan v_0v_n . **Jarak** dari u ke v , dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah panjang dari lintasan terpendek dari u ke v . **Diameter** dari suatu graf dinotasikan dengan $diam$, adalah jarak maksimum antara dua titik di G yaitu $diam(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$.

Graf kincir dapat disebut juga dengan graf lengkap K_n atau *complete graph* yang terdapat m salinan dari graf lengkap K_n dengan sebuah titik sebagai titik pusat bersama dari semua salinan dari graf lengkap tersebut.

Definisi 2.1. [1] Untuk graf $K_1 + mK_3$ dengan $m \geq 2$ berlaku:

$$d(u, v) = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } u = v, \\ 1 & , \text{ jika } u \text{ dan } v \text{ pada satu kincir yang sama atau } u \text{ dan } v \text{ pusat kincir, dan} \\ 2 & , \text{ jika } u \text{ dan } v \text{ berada pada kincir yang berbeda.} \end{cases}$$

Definisi 2.2. [1] Minimum himpunan pembeda graf $K_1 + mK_3$ diperoleh dengan tidak memasukan titik pusat atau sisi pusat kincir dalam subhimpunan W karena titik pusat tidak akan memberikan representasi yang berbeda pada titik-titik dari $K_1 + mK_3$, sehingga pasti tidak akan menghasilkan himpunan pembeda minimum.

Definisi 2.3. [4] Graf yang berasal dari operasi jumlah antara graf G_1 dan G_2 , ditulis $G = G_1 + G_2$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi-nya $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup (u, v) | u \in V(G_1), v \in V(G_2)$.

Dimensi metrik pada suatu graf G dapat dinotasikan dengan $dim(G)$, dimana dimensi metrik adalah kardinalitas minimum dari semua kardinalitas dari

semua himpunan pemisah pada G . Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Jika subhimpunan terurut pada $W \subseteq V(G)$ dengan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, dan $v \in V(G)$ sehingga diperoleh representasi dari titik v terhadap W yang didefinisikan sebagai pasangan- k terurut $(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$ dan dinotasikan dengan $r(v|W)$. Jika untuk setiap dua titik yang berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut himpunan pembeda dari $V(G)$. Himpunan pembeda W dengan kardinalitas minimum disebut dengan himpunan pembeda minimum.

Teorema 2.4. [3] *Misalkan G adalah graf terhubung dengan banyak titik n . Maka $\dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$ dengan $n \geq 2$.*

Teorema 2.5. [3] *Misalkan G adalah graf lengkap(K_n) dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $\dim(G) = n - 1$.*

3. Dimensi Metrik Graf Kincir Pola $K_1 + mK_4$

Pada bab ini akan dibahas mengenai dimensi metrik graf kincir pola $K_1 + mK_4$. Graf kincir pola $K_1 + mK_4$ adalah graf yang mempunyai n buah pasang titik yang masing-masing disimbolkan dengan

$$V(K_1 + mK_4) = \{x, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{1,3}, y_{1,4}, y_{2,1}, y_{2,2}, y_{2,3}, y_{2,4}, \dots, y_{m,1}, y_{m,2}, y_{m,3}, y_{m,4}\}. \quad (3.1)$$

Teorema 3.1. [1] *Dimensi Metrik graf $K_1 + mK_4$ adalah $3m$ dengan $m \geq 2$.*

Bukti. Misalkan $m \geq 2$, dengan $V(K_1 + mK_4)$ seperti pada (3.1). Untuk menentukan Dimensi Metrik dari graf $K_1 + mK_4$ dengan $m \geq 2$, maka pandang tiga kasus berikut.

Kasus 1. Misalkan $m = 2$.

Akan ditunjukkan $\dim(G_2) = 6$, yaitu dengan menunjukkan bahwa

- (i) $\dim(G_2) \leq 6$, yang memberikan representasi yang berbeda.
- (ii) $\dim(G_2) \geq 6$, Yaitu sesuai Definisi 2.2 maka titik pusat x tidak dimasukkan sebagai elemen W . Dari (i) dan (ii), maka $\dim(G_2) = 6$.

Kasus 2. Misalkan $m = 3$.

Akan ditunjukkan $\dim(G_3) = 9$, yaitu dengan menunjukkan bahwa

- (i) $\dim(G_3) \leq 9$, yang memberikan representasi yang berbeda.
- (ii) $\dim(G_3) \geq 6$, Yaitu sesuai Definisi 2.2 maka titik pusat x tidak dimasukkan sebagai elemen W . Dari (i) dan (ii), maka $\dim(G_3) = 9$.

Kasus 3. Untuk $m > 3$.

Akan ditunjukkan $\dim(G_m) = 3m$, Yaitu dengan menunjukkan bahwa

- (i) $\dim(G_{3m}) \leq 3m$, yang memberikan representasi yang berbeda.
- (ii) $\dim(G_{3m}) \geq 3m$, Yaitu sesuai Definisi 2.2 maka titik pusat x tidak dimasukkan sebagai elemen W . Dari (i) dan (ii), maka $\dim(G_m) = 3m$. $\square$

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah ditentukan dimensi metrik dari graf $K_1 + mK_4$ untuk $m \geq 2$, yaitu $\dim(K_1 + mK_4) = 3m$.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, ibu Dr. Lyra Yulianti, dan ibu Dr. Susila Bahri selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran pada penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Wahyudi Suhud, Sumarno, Suharmadi. 2011. Dimensi Metrik Graf Kincir Pola $K_1 + mK_3$. pp 17 – 22.
- [2] Harary, F. dan Melter, R. 1976. On the Metric Dimension of a Graph, *Ars Combin.* **2**: 191 – 195.
- [3] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellerman, 2002. Resolvability in Graphs and The Metric Dimension of Graph, *Discrete Appl. Math* **105**: 99 – 113.
- [4] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 2008. *Graph theory*. New York: Springer .
- [5] Abdussakir, dkk. 2009. *Graph theory*. Malang: UIN Malang Press.