SIFAT DEFINIT NON-NEGATIF FUNGSI KARAKTERISTIK DARI SEBARAN BINOMIAL NEGATIF MAJEMUK SEBAGAI PENJUMLAHAN SEBARAN EKSPONENSIAL

STEFI AMALIA PUTRI

*Program Studi Magister Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 email : stefiamaliafitri27@gmail.com*

Abstrak. Sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial adalah penjumlahan sebaran eksponensial yang saling bebas, dimana banyaknya sebaran tersebut menyebar menurut sebaran binomial negatif. Paper ini memperlihatkan sifat definit non-negatif fungsi karakteristik dari suatu sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial yang ditunjukkan dengan memperlihatkan sifat kekontinuan dan bentuk kuadratik.

Kata Kunci: Sebaran binomial negatif majemuk, Sebaran eksponensial, Fungsi karakteristik, Fungsi definit non-negatif

Diterima : 26 Juli 2018
 Direvisi : 17 September 2018
 Dipublikasikan : 21 Desember 2018

1. Pendahuluan

Percobaan binomial negatif dapat juga disebut sebagai percobaan Bernoulli yang dilakukan sampai terjadi r buah sukses, dengan setiap pengulangannya saling bebas dimana peluang gagalnya yaitu $1 - p$ dan peluang sukses p . Misalkan peubah acak N menyatakan jumlah percobaan yang dibutuhkan sampai terjadi r sukses, maka sebaran peluang dari N disebut sebaran binomial negatif dengan fungsi kepekatan

$$f_N(n) = P(N = n) = \binom{r+n-1}{n} p^r (1-p)^n \quad (1.1)$$

dimana $n = 0, 1, 2, \dots$ dan $0 \leq p \leq 1$.

Adapun fungsi karakteristik dari peubah acak N yang berdistribusi binomial negatif dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \varphi_N(t) &= E_N(e^{itN}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} \binom{r+n-1}{n} p^r (1-p)^n \\ &= p^r \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} ((1-p)e^{it})^n \end{aligned}$$

misalkan $1 - p^* = (1 - p)e^{it}$, maka

$$\begin{aligned}
 &= p^r \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} (1-p^*)^n \frac{(p^*)^r}{(p^*)^r} \\
 &= \frac{p^r}{(p^*)^r} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} (1-p^*)^n (p^*)^r \\
 &= \left(\frac{p}{(1 - (1-p)e^{it})} \right)^r \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

Misalkan X variabel acak dari sebaran eksponensial dengan parameter λ . Fungsi kepekatan peluang dari variabel acak ini diberikan

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

untuk λ positif dan semua x bilangan riil positif. Fungsi karakteristik dari peubah acak X adalah

$$\begin{aligned}
 \varphi_X(t) &= E(e^{itX}) \\
 &= \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \lambda \int_0^{\infty} e^{itx - \lambda x} dx \\
 &= \frac{\lambda}{(\lambda - it)} \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

Pada bagian ini telah dijelaskan tentang fungsi karakteristik dari sebaran binomial negatif dan eksponensial. Selanjutnya pada Bagian 2 akan dijelaskan tentang fungsi karakteristik dari sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial. Sedangkan Bagian 3 akan menjelaskan tentang sifat definit non-negatif fungsi karakteristik dari sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial.

2. Fungsi Karakteristik dari Sebaran Binomial Negatif Majemuk sebagai Penjumlahan Sebaran Eksponensial

Pada bagian ini akan dibahas tentang fungsi karakteristik sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial dengan konstanta penstabil. Misalkan $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, peubah acak X_i identik dan saling bebas serta menyebar eksponensial dengan parameter λ dan saling bebas terhadap peubah acak N menyebar binomial negatif (p, r) , maka peubah acak S disebut sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial dengan konstanta penstabil.

Teorema 2.1. Misalkan $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ dimana X_i dan N masing-masing merupakan peubah acak dan X_i peubah acak yang saling bebas dan identik (*iid*), maka fungsi karakteristik dari peubah acak S adalah

$$\varphi_S(t) = M_N(\ln(\varphi_X(t))). \tag{2.1}$$

Bukti. Berdasarkan definisi fungsi karakteristik diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \varphi_S(t) &= E_S(e^{itS}), \\
 &= E_N(E_{X_i}(e^{it(X_1+X_2+\dots+X_N)}|N)), \\
 &= E_N(E_{X_1}(e^{itX_1})E_{X_2}(e^{itX_2})\dots E_{X_N}(e^{itX_N})), \\
 &= E_N(\varphi_X(t)^N), \\
 &= M_N(\ln(\varphi_X(t))). \quad \square
 \end{aligned}$$

Proposisi 2.2. Misalkan S adalah suatu peubah acak yang menyebar menurut sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial, maka fungsi karakteristik dari peubah acak S adalah

$$\varphi_S(t) = \left[\frac{p}{(1 - (1-p)\frac{\lambda}{\lambda - it})} \right]^r. \quad (2.2)$$

Bukti. Fungsi karakteristik dari sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \varphi_S(t) &= M_N[\ln(\varphi_X(t))], \\
 &= \left[\frac{p}{(1 - (1-p)\varphi_X(t))} \right]^r, \\
 &= \left[\frac{p}{(1 - (1-p)\frac{\lambda}{\lambda - it})} \right]^r.
 \end{aligned}$$

Jadi, fungsi karakteristik dari sebaran Binomial Negatif-Eksponensial adalah

$$\varphi_S(t) = \left[\frac{p}{(1 - (1-p)\frac{\lambda}{\lambda - it})} \right]^r. \quad \square$$

3. Sifat Definit Non-Negatif Fungsi Karakteristik dari Sebaran Binomial Negatif Majemuk sebagai Penjumlahan Sebaran Eksponensial

Akan diperkenalkan fungsi definit non-negatif yang merupakan syarat perlu dan cukup untuk fungsi karakteristik. Sebuah fungsi bernilai kompleks $\varphi_X(t)$ dengan t bilangan riil dikatakan fungsi definit non-negatif jika dua kondisi berikut dipenuhi[4]:

- (1) $\varphi_X(t)$ adalah kontinu
- (2) bentuk kuadrat $\sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq l \leq n} c_j \bar{c}_l \varphi_X(t_j - t_l) \geq 0$, untuk sebarang bilangan kompleks $c_1, c_2, \dots, c_n$ dan bilangan riil $t_1, t_2, \dots, t_n$ dan $n \geq 1$.

Proposisi 3.1. Misalkan S adalah suatu peubah acak yang menyebar menurut sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial, dengan fungsi karakteristik sebagai berikut

$$\varphi_S(t) = \left[\frac{p}{(1 - (1-p)\frac{\lambda}{\lambda - it})} \right]^r \quad (3.1)$$

maka fungsi $\varphi_S(t)$ adalah fungsi definit non-negatif.

Bukti. Fungsi $\varphi_S(t)$ adalah fungsi definit non-negatif, Jika

- (1) Fungsi karakteristik $\varphi_S(t)$ kontinu. Kekontinuan $\varphi_S(t)$ akan dibuktikan melalui kekontinuan seragam.

Misalkan $\varphi_S(t)$ adalah suatu fungsi karakteristik dan $h = s - t, s > t$. Akan ditunjukkan bahwa setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|\varphi_S(s) - \varphi_S(t)| < \epsilon$, jika $|s - t| < \delta$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |\varphi_S(s) - \varphi_S(t)| &= \left| \left(\frac{p}{(1 - (1-p)\frac{\lambda}{\lambda-is})} \right)^r - \left(\frac{p}{(1 - (1-p)\frac{\lambda}{\lambda-it})} \right)^r \right| \\ &= p^r \left| \left(\frac{1}{(1 - \frac{(1-p)\lambda}{\lambda-is})} \right)^r - \left(\frac{1}{(1 - \frac{(1-p)\lambda}{\lambda-it})} \right)^r \right| \\ &= p^r \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1-p)\lambda}{\lambda-is} \right)^k \right)^r - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1-p)\lambda}{\lambda-it} \right)^k \right)^r \right| \end{aligned}$$

Misal $h = s - t$ dan $h \rightarrow 0$ maka,

$$\begin{aligned} |\varphi_S(h+t) - \varphi_S(t)| &= p^r \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1-p)\lambda}{\lambda-i(h+t)} \right)^k \right)^r - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1-p)\lambda}{\lambda-it} \right)^k \right)^r \right| \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ini menunjukkan untuk $\delta < \epsilon$ dimana $|\varphi_S(h+t) - \varphi_S(t)|$ untuk $|s - t| < \delta$ dan δ bergantung pada ϵ , maka $\varphi_S(t)$ adalah kontinu seragam.

- (2) Bentuk kuadrat $\sum_{1 \leq j, l \leq n} c_j \bar{c}_l \varphi_S(t_j - t_l) \geq 0$, untuk sebarang bilangan kompleks $c_1, c_2, \dots, c_n$ dan bilangan riil $t_1, t_2, \dots, t_n$ dan $n \geq 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j, l \leq n} c_j \bar{c}_l \varphi_S(t_j - t_l) &= \sum_{1 \leq j, l \leq n} c_j \bar{c}_l \left(\frac{p}{(1 - (1-p)\frac{\lambda}{\lambda-i(t_j-t_l)})} \right)^r \\ &= p^r \sum_{1 \leq j, l \leq n} c_j \bar{c}_l \left(\frac{1}{(1 - \frac{(1-p)\lambda}{\lambda-i(t_j-t_l)})} \right)^r \\ &= p^r \sum_{1 \leq j, l \leq n} c_j \bar{c}_l \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1-p)\lambda}{\lambda-i(t_j-t_l)} \right)^k \right)^r \\ &= p^r \sum_{1 \leq j, l \leq n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \lambda^k \left(c_j^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{\lambda-it_j} \right)^k c_l^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{\lambda+it_l} \right)^k \right) \right)^r \\ &= p^r \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \lambda^k \left| c_j^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{\lambda-it_j} \right)^k \right|^2 \right)^r \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Karna dua kondisi diatas terpenuhi, maka dapat dikatakan fungsi $\varphi_S(t)$ adalah fungsi definit non-negatif. $\square$

Daftar Pustaka

- [1] Bain, L.J. dan M. Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics Second Edition*. Duxbury Press, California.
- [2] Chung, K. L. 2001. *A Course In Probability Theory*. 3rded. San Diego: Academy Press
- [3] Devianto, D. Maiyastri, Oktasari, L. and Anas, M.. 2015. Convolution of generated random variable from exponential distribution with stabilizer constant. *Applied Mathematical Sciences*, 4781 – 4789
- [4] Devianto, D. Maiyastri, Handayani, D. 2017. The Infinitely Divisible Characteristic Function and its Canonical Representation Property of Compound Negative Binomial Distribution. Akan terbit pada jurnal *Probability and Statistical Mathematics*
- [5] Furman, E. 2007. On the Convolution of the Negative Binomial Random Variables. *Statistics and Probability Letter*. **77** 169 – 172
- [6] Lukacs, E. 1992. *Characteristic Function*. 2nd ed. London: Griffin
- [7] Panjer, H. H. dan G. E. Willot. 1981. Finite Sum Evaluation of The Negative Binomial-Eksponensial Model. *Astin Bulletin*. 133 – 137
- [8] Wang, Z. 2011. One Mix Negative Binomial Distribution with Application. *Statistical Planning*, **141**, 1153 – 1160