BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK JOIN DARI DUA GRAF

YULI ERITA

*Program Studi Matematika,
 Pascasarjana Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,*

Abstract. Let f be a proper k -coloring of a connected graph G and $\Pi = (V_1, \dots, V_k)$ be an ordered partition of $V(G)$ into the resulting color classes. For a vertex v of G , the color code of v with respect to Π is defined to be the ordered k -tuple

$$c_{\Pi}(v) = (d(v, V_1), d(v, V_2), \dots, d(v, V_k)),$$

where $d(v, V_i) = \min\{d(v, x) | x \in V_i\}$, $1 \leq i \leq k$. If distinct vertices have distinct color codes, then f is called a locating coloring. The minimum number of colors needed in a locating coloring of G is the locating chromatic number of G , and denoted by $\chi_L(G)$. In this paper, we study the locating chromatic number of the join of some graphs.

Kata Kunci: Locating coloring, locating chromatic number, join

1. Pendahuluan

Suatu pewarnaan titik (*vertex coloring*) pada graf G adalah suatu pemetaan $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ sehingga $c(v) \neq c(w)$ jika v dan w bertetangga. Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari G adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga, jika titik-titik di G diwarnai dengan n warna, maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$. Misalkan $\chi(G) = n$, ini berarti titik-titik di G paling kurang diwarnai dengan n warna, dan tidak dapat diwarnai dengan $n - 1$ warna.

Kelas warna pada G , dinotasikan dengan C_i , merupakan himpunan titik-titik yang berwarna i dan $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = C_1, C_2, \dots, C_k$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi v terhadap Π disebut kode warna dari v , dinotasikan dengan $c_{\Pi}(v)$. Kode warna (*color code*) $c_{\Pi}(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai k vektor:

$$c_{\Pi}(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)),$$

di mana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi (*locating coloring*) bagi G . Oleh karena itu, pewarnaan lokasi pada graf G adalah pewarnaan yang membedakan setiap titik di G berdasarkan jaraknya terhadap warna yang dihasilkan. Jumlah minimum warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi (*locating chromatic number*). Karena setiap pewarnaan lokasi merupakan suatu pewarnaan, maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$ untuk setiap graf terhubung G .

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut. Misal diberikan suatu graf G dengan orde $n = 8$ dan diberikan pewarnaan seperti pada Gambar 1, dengan kelas warna $C_1 = \{v_1, v_5\}$, $C_2 = \{v_3, v_7\}$, $C_3 = \{v_2, v_6\}$, dan $C_4 = \{v_4, v_8\}$.

Gambar 1. Pewarnaan c' pada Graf G

Kode warna dari titik-titik di graf G terhadap $\Pi' = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ adalah

$$\begin{aligned} c_{\Pi'}(v_1) &= (d(v_1, C_1), d(v_1, C_2), d(v_1, C_3), d(v_1, C_4)) = (0, 2, 1, 2), \\ c_{\Pi'}(v_2) &= (d(v_2, C_1), d(v_2, C_2), d(v_2, C_3), d(v_2, C_4)) = (1, 1, 0, 1), \\ c_{\Pi'}(v_3) &= (d(v_3, C_1), d(v_3, C_2), d(v_3, C_3), d(v_3, C_4)) = (2, 0, 1, 1), \\ c_{\Pi'}(v_4) &= (d(v_4, C_1), d(v_4, C_2), d(v_4, C_3), d(v_4, C_4)) = (1, 1, 2, 0), \\ c_{\Pi'}(v_5) &= (d(v_5, C_1), d(v_5, C_2), d(v_5, C_3), d(v_5, C_4)) = (0, 2, 1, 1), \\ c_{\Pi'}(v_6) &= (d(v_6, C_1), d(v_6, C_2), d(v_6, C_3), d(v_6, C_4)) = (1, 1, 0, 1), \\ c_{\Pi'}(v_7) &= (d(v_7, C_1), d(v_7, C_2), d(v_7, C_3), d(v_7, C_4)) = (2, 0, 1, 1), \\ c_{\Pi'}(v_8) &= (d(v_8, C_1), d(v_8, C_2), d(v_8, C_3), d(v_8, C_4)) = (2, 2, 1, 0). \end{aligned}$$

Pewarnaan dengan empat warna pada graf G bukan suatu pewarnaan lokasi karena terdapat titik-titik dengan kode warna sama. Sebaliknya pewarnaan c'' pada G seperti terlihat pada Gambar 1 merupakan pewarnaan lokasi pada graf G karena setiap titik pada graf G memiliki kode warna berbeda terhadap $\Pi'' = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$. Kode warna dari titik-titik pada G dengan lima pewarnaan adalah

$$\begin{aligned} c'_{\Pi''}(v_1) &= (d(v_1, C_1), d(v_1, C_2), d(v_1, C_3), d(v_1, C_4), d(v_1, C_5)) = (0, 1, 1, 2, 2), \\ c'_{\Pi''}(v_2) &= (d(v_2, C_1), d(v_2, C_2), d(v_2, C_3), d(v_2, C_4), d(v_2, C_5)) = (1, 0, 1, 1, 1), \\ c'_{\Pi''}(v_3) &= (d(v_3, C_1), d(v_3, C_2), d(v_3, C_3), d(v_3, C_4), d(v_3, C_5)) = (2, 1, 0, 1, 2), \\ c'_{\Pi''}(v_4) &= (d(v_4, C_1), d(v_4, C_2), d(v_4, C_3), d(v_4, C_4), d(v_4, C_5)) = (3, 2, 1, 0, 1), \\ c'_{\Pi''}(v_5) &= (d(v_5, C_1), d(v_5, C_2), d(v_5, C_3), d(v_5, C_4), d(v_5, C_5)) = (2, 3, 1, 1, 0), \\ c'_{\Pi''}(v_6) &= (d(v_6, C_1), d(v_6, C_2), d(v_6, C_3), d(v_6, C_4), d(v_6, C_5)) = (1, 2, 0, 1, 1), \\ c'_{\Pi''}(v_7) &= (d(v_7, C_1), d(v_7, C_2), d(v_7, C_3), d(v_7, C_4), d(v_7, C_5)) = (2, 1, 1, 1, 0), \\ c'_{\Pi''}(v_8) &= (d(v_8, C_1), d(v_8, C_2), d(v_8, C_3), d(v_8, C_4), d(v_8, C_5)) = (2, 1, 1, 0, 2). \end{aligned}$$

Gambar 2. Pewarnaan c'' pada Graf G

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa pewarnaan c'' yang menggunakan lima warna pada G adalah pewarnaan lokasi dengan kardinalitas paling kecil. Oleh karena itu, bilangan kromatik lokasi dari graf G , $\chi_L(G) = 5$.

Teorema 1.1. [5] *Misal c suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Jika u dan v adalah titik-titik yang berbeda pada G sedemikian sehingga, $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga pada G sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = (C_1, C_2, \dots, C_k)$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i . Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π . Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i; 1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Dengan demikian, $c(u) \neq c(v)$. $\square$

2. Bilangan Kromatik Lokasi Untuk Join dari Dua Graf

Misalkan G adalah suatu graf tanpa *loop* dan sisi ganda dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Suatu pewarnaan k -warna dari G , $k \in \mathbb{N}$, adalah suatu fungsi f didefinisikan dari $V(G)$ pada $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$ sehingga setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

Definisi 2.1. *Misalkan f adalah suatu k -pewarnaan dari suatu graf terhubung G dan $\Pi = (C_1, C_2, \dots, C_k)$ adalah partisi terurut dari $V(G)$ dalam kelas warna yang dihasilkan. Untuk suatu titik v di G , kode warna dari v yang terkait dengan Π didefinisikan sebagai berikut*

$$c_\Pi(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)).$$

Jika titik yang berbeda pada G mempunyai warna yang berbeda maka f disebut pewarnaan lokasi dari G . Bilangan kromatik lokasi, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$, adalah banyak warna minimum dalam pewarnaan lokasi G .

Koordinat ke- i pada kode warna setiap titik dalam kelas warna C_i adalah nol dan koordinat lainnya selain nol. Oleh karena itu suatu pewarnaan merupakan suatu

pewarnaan lokasi jika kode warna dari titik titik dalam setiap kelas warna selalu berbeda.

3. Bilangan Kromatik Lokasi Tetangga

Bilangan kromatik lokasi tetangga mempunyai hubungan yang sangat dekat dengan bilangan kromatik lokasi. Bilangan kromatik lokasi tetangga juga bisa digunakan untuk graf tidak terhubung.

Definisi 3.1. [2] Misalkan f adalah suatu k -pewarnaan pada graf G . Jika untuk setiap dua titik yang berbeda u dan v berwarna sama, dengan $f(N_G(u)) \neq f(N_G(v))$, maka f disebut sebagai suatu pewarnaan lokasi tetangga dari G . Bilangan kromatik lokasi tetangga, dinotasikan dengan $\chi_{L2}(G)$, adalah banyak warna minimum pada pewarnaan lokasi tetangga pada G .

Misalkan terdapat suatu graf G dengan pewarnaan seperti pada Gambar 3.

Gambar 3. Pewarnaan pada graf G

Dari Gambar 3 terlihat bahwa v_1, v_3 dan v_9 berwarna sama dengan $f(N_G(v_1)) = \{2\}$, $f(N_G(v_3)) = \{2, 3\}$ dan $f(N_G(v_9)) = \{3\}$, titik v_2, v_4 dan v_7 juga berwarna sama, dengan himpunan warna tetangganya $f(N_G(v_2)) = \{1, 3\}$, $f(N_G(v_4)) = \{1\}$, $f(N_G(v_7)) = \{3\}$, titik v_5, v_6 dan v_8 juga berwarna sama, dan himpunan warna tetangganya $f(N_G(v_5)) = \{2\}$, $f(N_G(v_6)) = \{1\}$, $f(N_G(v_8)) = \{1, 2\}$. Karena setiap titik yang berwarna sama pada G mempunyai himpunan warna tetangga yang berbeda maka pewarnaan pada G adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dengan menggunakan 3-warna.

Untuk melihat hubungan antara parameter χ_L dan χ_{L2} , misalkan f adalah suatu k -pewarnaan dari graf terhubung G dan $\Pi = (V_1, V_2, \dots, V_k)$ adalah suatu partisi terurut dari $V(G)$ dalam menghasilkan kelas warna. Pewarnaan f adalah pewarnaan lokasi tetangga jika dan hanya jika titik yang berbeda pada G mempunyai kode warna yang berbeda [2]. Selanjutnya, setiap pewarnaan lokasi tetangga pada G adalah pewarnaan lokasi. Oleh karena itu $\chi_L(G) \leq \chi_{L2}(G)$. Jika diameter G paling besar dua, maka setiap pewarnaan lokasi dari G adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dan oleh karena itu $\chi_{L2}(G) \leq \chi_L(G)$. Karena itu diperoleh Proposisi 3.2 berikut ini.

Proposisi 3.2. [2] *Jika G adalah suatu graf terhubung dengan diameter ≤ 2 , maka $\chi_L(G) = \chi_{L2}(G)$.*

Khusus untuk graf lengkap [2], $\chi_{L2}(K_n) = n$ dan $\chi_{L2}(K_{m,n}) = m + n$.

4. Bilangan Kromatik Lokasi dan Operasi Join

Pada bagian ini akan ditentukan kembali bilangan kromatik lokasi dari graf pertemanan, dan join dari graf lintasan, lingkaran, dan graf lengkap.

Teorema 4.1. [2] *Untuk sebarang graf G_1 dan G_2 , $\chi_L(G_1 + G_2) = \chi_{L2}(G_1) + \chi_{L2}(G_2)$.*

Bukti. Diameter $\chi_L(G_1 + G_2)$ paling besar dua, oleh karena itu berdasarkan Proposisi 3.2, $\chi_L(G_1 + G_2) = \chi_{L2}(G_1 + G_2)$. Misalkan $k_1 = \chi_{L2}(G_1)$, $k_2 = \chi_{L2}(G_2)$, dan $k = \chi_{L2}(G_1 + G_2)$. Misalkan juga f adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dengan k -warna pada $(G_1 + G_2)$. Titik-titik pada G_1 bertetangga dengan titik-titik pada G_2 dan oleh karena itu,

$$\{f(u) \mid u \in V(G_1)\} \cap \{f(v) \mid v \in V(G_2)\} = \emptyset.$$

Misalkan $k'_1 = |f(u) \mid u \in V(G_1)|$ dan $k'_2 = |f(v) \mid v \in V(G_2)|$. Dengan demikian, $k = k'_1 + k'_2$. Asumsikan bahwa u dan u' adalah dua titik di G_1 yang mempunyai warna yang sama. Karena f adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dan $V(G_2) \subseteq N_{G_1+G_2}(u) \cap N_{G_1+G_2}(u')$, maka diperoleh $f(N_{G_1}(u)) \neq f(N_{G_1}(u'))$. Hal ini berarti bahwa f adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dengan k'_1 -warna pada G_1 . Oleh karena itu $k_1 \leq k'_1$. Selanjutnya asumsikan bahwa v dan v' adalah dua titik di G_2 yang berwarna sama. Karena f adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dan $V(G_1) \subseteq N_{G_1+G_2}(v) \cap N_{G_1+G_2}(v')$, maka $f(N_{G_2}(v)) \neq f(N_{G_2}(v'))$. Hal ini berarti bahwa f adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dengan k'_2 -warna pada G_2 . Oleh karena itu $k_2 \leq k'_2$. Dengan demikian $k_1 + k_2 \leq k'_1 + k'_2 = k$.

Misalkan f_1 adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dengan k_1 -warna pada G_1 dengan himpunan warna $\{1, 2, 3, \dots, k_1\}$, dan f_2 adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dengan k_2 -warna pada G_2 dengan himpunan warna $\{k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k_1 + k_2\}$. Definisikan suatu pewarnaan f' dengan $k_1 + k_2$ -warna pada $G_1 + G_2$ sebagai $f'(u) = f_1(u)$ dimana $u \in V(G_1)$, dan $f'(v) = f_2(v)$ dimana $v \in V(G_2)$. Jika z_1 dan z_2 adalah titik pada $G_1 + G_2$ dengan $f'(z_1) = f'(z_2)$, maka $\{z_1, z_2\} \subseteq V(G_1)$ atau $\{z_1, z_2\} \subseteq V(G_2)$. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan bahwa $\{z_1, z_2\} \subseteq V(G_1)$. Karena f_1 adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dengan k_1 -warna dan $V(G_2) \subseteq N_{G_1+G_2}(z_1) \cap N_{G_1+G_2}(z_2)$, maka diperoleh $f(N_{G_1+G_2}(z_1)) \neq f(N_{G_1+G_2}(z_2))$. Ini berarti bahwa f' adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dengan $k_1 + k_2$ -pewarnaan pada $G_1 + G_2$, dan oleh karena itu, $k \leq k_1 + k_2$. Maka diperoleh bahwa $k = k_1 + k_2$. $\square$

Misalkan terdapat dua bilangan bulat positif m dan t , dan $G := tK_m$, merupakan graf yang terdiri dari t disjoint graf K_m . Suatu pewarnaan di G adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga jika dan hanya jika tidak terdapat dua komponen dengan

himpunan warna yang sama. Untuk suatu bilangan bulat positif k , himpunan $[k]$ mempunyai subhimpunan yang berbeda dengan ukuran m sebanyak $\binom{k}{m}$. Dengan demikian $\chi_{L2}(G) = \min\{k | t \leq \binom{k}{m}\}$.

Proposisi 4.2. [2] *Untuk suatu bilangan bulat positif t , misalkan $n := 2t + 1$, maka bilangan kromatik lokasi dari graf pertemanan Fr_n adalah $1 + \min\{k | t \leq \binom{k}{2}\}$.*

Bukti. Misal diberikan graf $Fr_n = K_1 + tK_2$. Banyak warna yang digunakan untuk mewarnai tK_m adalah $\min\{k | t \leq \binom{k}{m}\}$. Oleh karena itu pewarnaan untuk suatu graf tK_2 adalah $\min\{k | t \leq \binom{k}{2}\}$ dan warna minimum untuk K_1 adalah satu. Karena K_1 bertetangga dengan semua titik pada tK_2 maka warna titik pada tK_2 harus berbeda dengan warna titik di K_1 . Akibatnya $\chi_L(Fr_n) = 1 + \min\{k | t \leq \binom{k}{2}\}$. $\square$

Misalkan $G \in \{P_n, C_n\}$. Pewarnaan f di G dapat direpresentasikan dengan $[f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)]$. Untuk $1 \leq n_1 \leq n$, misalkan $f_{|[n_1]} = [f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_{n_1})]$ adalah batasan untuk f pada subgraf yang diinduksi oleh titik $v_1, v_2, \dots, v_{n_1}$. Jika terdapat suatu titik $v_l \in V(G)$ sedemikian sehingga $f(v_l) = s$ dan $f(N_G(v_l)) = r, t$, maka terdapat segmen $[[r, s, t]]$ di f . Notasi ini mengindikasikan bahwa pada graf G terdapat suatu titik berwarna s berada diantara dua titik yang berwarna r dan t . Perlu diketahui bahwa $[[r, s, t]] = [[t, s, r]]$. Jika $f(v_l) = c$ dan $f(N_G(v_l)) = r$, maka segmen $[[r, s, r]]$ terjadi di f . Hal ini mengindikasikan bahwa terdapat suatu titik berwarna s berada diantara dua titik berwarna r , atau terdapat suatu titik berderajat satu (daun) berwarna s dengan warna tetangga r . Jika r, s, t adalah elemen dari $[k]$ dengan $r \neq s$ dan $t \neq s$, maka $[[r, s, t]]$ disebut sebagai segmen yang mungkin atas himpunan $[k]$.

Proposisi 4.3. [2] *Misalkan n dan k adalah dua bilangan bulat positif. Jika terdapat pewarnaan lokasi tetangga k -warna f dari P_n atau C_n , maka $n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)$. Persamaan tersebut terpenuhi jika dan hanya jika tiap segmen yang mungkin atas himpunan $[k]$ terjadi paling banyak satu kali di f .*

Bukti. Asumsikan bahwa f adalah pewarnaan lokasi tetangga k -warna dari G , $G \in \{P_n, C_n\}$, untuk $k > 0$. Jika u dan v adalah dua titik di G dengan warna yang sama yaitu i , $1 \leq i \leq k$, maka $f(N_G(u)) \neq f(N_G(v))$. Untuk setiap $u \in V(G)$, $|f(N_G(u))| \leq 2$. Oleh karena itu diperoleh

$$|\{u | u \in V(G), f(u) = i, |f(N_G(u))| = 1\}| \leq k - 1$$

dan

$$|\{u | u \in V(G), f(u) = i, |f(N_G(u))| = 2\}| \leq \binom{k-1}{2}.$$

Ini berarti bahwa terdapat paling banyak $(k-1) + \binom{k-1}{2} = \frac{1}{2}(k^2 - k)$ titik di G dengan warna i . Oleh karena itu, $n \leq k \binom{k-1}{2}$. Karena f adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dengan k -pewarnaan, maka setiap titik berada pada $G \in \{P_n, C_n\}$

Jika f adalah suatu pewarnaan dari $P_t = v_1 v_2 \dots v_t$ dan f' adalah suatu pewarnaan dari $P_{t'} = v'_1 v'_2 \dots v'_{t'}$, maka

$$f \oplus f' = [f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_t), f'(v'_1), f'(v'_2), \dots, f'(v'_{t'})].$$

Oleh karena itu $f(v_t) \neq f'(v'_1)$. Dengan $f \oplus f'$ adalah suatu pewarnaan dari suatu graf lintasan $P_{t+t'} = v_1 \dots v_t v'_1 \dots v'_{t'}$.

Teorema 4.4. [2] Untuk suatu bilangan bulat positif $n \geq 2$, $\chi_{L2}(P_n) = m$, dimana $m = \min\{k \mid k \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$. Khususnya, terdapat suatu pewarnaan lokasi tetangga dengan m -warna f_n pada graf lintasan $P_n = v_1 v_2 \dots v_n$ sedemikian sehingga $f_n(v_{n-1}) = 2$ dan $f_n(v_n) = 1$. Untuk $n \geq 9$, $f_n(v_{n-2}) = m$. Selanjutnya, untuk $n \geq 9$ dan $n \neq \frac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1$, $f_n(v_1) = 2$, $f_n(v_2) = 1$.

Dari Teorema 4.1 dan Teorema 4.4 diperoleh dua akibat berikut.

Akibat 4.5. [2] Untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$, diperoleh

$$\chi_L(K_m + P_n) = m + \min\{k > 0, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}.$$

Khususnya, bilangan kromatik lokasi dari graf kipas F_n adalah $\chi_L(K_1 + P_n)$.

Bukti. Diberikan dua graf K_m dan P_n . Dari Teorema 4.1 diketahui bahwa $\chi_L(G_1 + G_2) = \chi_{L2}(G_1) + \chi_{L2}(G_2)$. Akibatnya $\chi_L(K_m + P_n) = \chi_{L2}(K_m) + \chi_{L2}(P_n)$. Dari Teorema 4.4 diketahui bahwa untuk $n \geq 2$ diperoleh $\chi_{L2}(P_n) = m$, di mana $m = \min\{k \mid k > 0, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$, dan $\chi_{L2}(K_m) = m$. Oleh karena itu

$$\chi_L(K_m + P_n) = m + \min\{k \mid k \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}. \quad \square$$

Akibat 4.6. [2] Untuk dua bilangan bulat positif $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, misalkan $m_0 = \min\{k \mid k \in \mathbb{N}, m \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$ dan $n_0 = \min\{k \mid k \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$. Maka, $\chi_L(P_m + P_n) = m_0 + n_0$.

Bukti. Untuk $m \geq 2$ diketahui bahwa $\chi_{L2}(P_n) = \min\{k \mid k \in \mathbb{N}, m \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$. dan $\chi_{L2}(P_m) = \min\{k \mid k \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$ untuk $n \geq 2$. Karena $m_0 = \min\{k \mid k \in \mathbb{N}, m \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$ dan $n_0 = \min\{k \mid k \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$, maka $\chi_{L2}(P_m) + \chi_{L2}(P_n) = m_0 + n_0$. Oleh karena itu $\chi_L(P_m + P_n) = m_0 + n_0$. $\square$

Selanjutnya akan ditentukan bilangan kromatik lokasi tetangga dari graf siklus. Kemudian akan ditentukan nilai untuk $\chi_L(P_m + C(n))$, $\chi_L(K_m + C(n))$ dan $\chi_L(C_m + C(n))$. Untuk setiap n , $3 \leq n < 9$, berdasarkan pewarnaan h_n pada graf siklus C_n berikut $h_3 = [1, 2, 3]$, $h_4 = [1, 2, 3, 4]$, $h_5 = [1, 2, 1, 2, 3]$, $h_6 = [1, 2, 1, 3, 2, 4]$, $h_7 = [2, 1, 3, 2, 3, 2, 1]$, $h_8 = [3, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 4]$, dapat dilihat bahwa setiap pewarnaan h_n adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga. Perlu diketahui bahwa $\chi_L(C_n)$ adalah tiga atau empat tergantung pada banyaknya n , dan $\chi_L(C_n) \leq \chi_{L2}(C_n)$. Selanjutnya, $\chi_L(C_n) = \chi_{L2}(C_n)$ untuk $3 \leq n < 9$. Untuk kasus $n \geq 9$, diperoleh teorema berikut.

Teorema 4.7. [2] Untuk suatu bilangan bulat positif $n \geq 9$, misalkan $n_0 = \min\{k \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$, maka

$$\chi_{L2}(C_n) = \begin{cases} n_0 & \text{untuk } n \neq \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1 \\ n_0 + 1 & \text{untuk } n = \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $C_n = v_1 v_2 \dots v_n v_1$. Dari Proposisi 3.2, diperoleh $\chi_{L2}(C_n) \leq n_0$. Asumsikan bahwa $n \neq \frac{1}{2}((n_0^3 - n_0^2) - 1)$. Berdasarkan Teorema 4.4, terdapat suatu pewarnaan lokasi tetangga f_n dengan n_0 -warna pada graf lintasan $P_n = v_1 v_2 \dots v_n$ sedemikian sehingga $f_n(V_1) = 2, f_n(V_2) = 1, f_n(V_{n-1}) = 2$. Misalkan f_n sebagai suatu pewarnaan dari titik pada C_n . Karena $f_n(v_1) \neq f_n(v_n)$, maka f_n adalah suatu pewarnaan sejati pada C_n . Oleh karena itu, untuk setiap $1 \leq i \leq n$, diperoleh $f_n(N_{C_n}(v_1)) = f_n(N_{P_n}(v_1))$. Selanjutnya, f_n adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga pada C_n dengan n_0 -warna. Hal ini mengakibatkan bahwa $\chi_{L2}(C_n) = n_0$.

Asumsikan bahwa $n = \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1$. Berdasarkan Teorema 4.4, terdapat suatu pewarnaan lokasi tetangga f_{n-1} dari lintasan $P_{n-1} = v_1 v_2 \dots v_n$ sedemikian sehingga $f_{n-1}(V_1) = 2$ dan $f_{n-1}(V_{n-1}) = 1$. Definisikan suatu pewarnaan f'_n pada C_n sebagai $f'_n(v_n) = n_0 + 1$ dan $f'_n(v_i) = f_{n-1}(v_i)$ untuk $1 \leq i \leq n-1$. Diketahui bahwa, $n_0 + 1 \in f'_n(N_{C_n}(v_1)) \cap f'_n(N_{C_n}(v_{n-1}))$, $f'_n(v_1) \neq f'_n(v_{n-1})$, dan $f'_n(N_{C_n}(v_i)) = f_{n-1}(N_{P_{n-1}}(v_i))$ untuk setiap $2 \leq i \leq n-2$. Dengan demikian, f'_n adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga dengan $(n_0 + 1)$ -warna pada C_n . Oleh karena itu, $\chi_{L2}(C_n) \leq n_0 + 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $\chi_{L2}(C_n) = n_0$. Anggap bahwa terdapat suatu pewarnaan lokasi tetangga f dengan n_0 -warna pada C_n . Misalkan $V_i = \{x \mid x \in V(C_n), f(x) = i\}$. Karena f adalah suatu pewarnaan lokasi tetangga, setiap kelas warna memuat paling banyak $\frac{1}{2}(n_0^2 - n_0)$ titik. karena $n = \frac{1}{2}((n_0^3 - n_0^2) - 1)$, tepat satu kelas warna, misalnya V_1 , berukuran $\frac{1}{2}(n_0^2 - n_0) - 1$ dan yang lainnya berukuran $\frac{1}{2}(n_0^2 - n_0)$. Untuk setiap $2 \leq i \leq n_0$, misalkan $X_i = \{x, y \mid x \in N_{C_n}(y), f(x) = 1, f(y) = i\}$. Misalkan $2 \leq i \leq n_0$. Karena $|V_i| = \frac{1}{2}(n_0^2 - n_0)$, semua segmen yang mungkin pada bentuk $[[r, i, j]]$, dimana $r \in [n_0]$ dan $j \in [n_0]$, muncul di f . Dengan demikian, untuk setiap j dengan $j \in \{1, i\}$, terdapat $y \in V_i$ sedemikian sehingga $f(N_{C_n}(y)) = \{1, j\}$. Juga terdapat $z \in V_i$ sedemikian sehingga $f(N_{C_n}(z)) = \{1\}$. Ini mengakibatkan $|X_i| = (n_0 - 2) + 2 = n_0$. Oleh karena itu $|X| = (n_0 - 1)n_0$, dimana $X = X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_{n_0}$. Setiap titik x dengan warna 1 mempunyai dua tetangga dan oleh karena itu $|X| = 2|\{x \mid x \in V(C_n), f(x) = 1\}|$. Ini berarti bahwa terdapat titik sebanyak $\frac{|X|}{2} = \frac{(n_0-1)n_0}{2}$ berwarna 1. $\square$

Dari Proposisi 3.2, Teorema 4.4, dan Teorema 4.7 diperoleh akibat-akibat berikut.

Akibat 4.8. [2] Untuk dua bilangan bulat positif $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, misalkan $m_0 = \min\{k \in \mathbb{N}, m \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$ dan $n_0 = \min\{k \mid k \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$, maka

$$\chi_L(P_m + C_n) = \begin{cases} m_0 + \chi_L(C_n); & \text{untuk } 3 \leq n < 9 \\ m_0 + n_0 & ; \text{ untuk } n \geq 9, n \neq \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1 \\ m_0 + n_0 + 1 & ; \text{ untuk } n \geq 9, n = \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1. \end{cases}$$

Akibat 4.9. [2] Untuk dua bilangan bulat positif $m \geq 1$ dan $n \geq 3$, misalkan $n_0 = \min\{k \in \mathbb{N}, m \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$. Maka,

$$\chi_L(K_m + C_n) = \begin{cases} m + \chi_L(C_n); & \text{untuk } 3 \leq n < 9 \\ m + n_0 & ; \text{ untuk } n \geq 9, n \neq \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1 \\ m + n_0 + 1 & ; \text{ untuk } n \geq 9, n = \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1. \end{cases}$$

Karena graf roda $W_n \simeq K_1 + C_n$, maka bilangan kromatik lokasi graf roda W_n dapat diperoleh dengan menghitung $\chi_L(K_1 + C_n)$.

Akibat 4.10. [2] Untuk dua bilangan positif m dan n , $3 \leq m \leq n$, misalkan $m_0 = \min\{k \in \mathbb{N}, m \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$ dan $n_0 = \min\{k \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$, maka

$$\chi_L(C_m + C_n) = \begin{cases} \chi_L(m) + \chi_L(n) & ; \text{ untuk } n < 9 \\ \chi_L(m) + n_0 & ; \text{ untuk } m < 9 \leq n, n \neq \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1 \\ \chi_L(m) + n_0 + 1 & ; \text{ untuk } m < 9 \leq n, n = \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1 \\ m_0 + n_0 & ; \text{ untuk } m \geq 9, m \neq \frac{1}{2}(m_0^3 - m_0^2) - 1, n \neq \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1 \\ m_0 + n_0 + 1 & ; \text{ untuk } m \geq 9, m = \frac{1}{2}(m_0^3 - m_0^2) - 1, n \neq \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1 \\ m_0 + n_0 + 1 & ; \text{ untuk } m \geq 9, m \neq \frac{1}{2}(m_0^3 - m_0^2) - 1, n = \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1 \\ m_0 + n_0 + 2 & ; \text{ untuk } m \geq 9, m = \frac{1}{2}(m_0^3 - m_0^2) - 1, n = \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1. \end{cases}$$

Daftar Pustaka

- [1] As'ad, Nabila. Tanpa Tahun. Aplikasi Pewarnaan Graf pada Pemecahan Masalah Penyusunan Jadwal. ITB. Bandung.
- [2] Behtoei, A. 2012. The Locating Chromatic Number of the Join of Graphs. arxiv.org/abs/1112.2357.
- [3] Bondy, J.A dan U.S.R Murty. 2008. **Graph Theory**, Springer, United States.
- [4] Chartrand, G dan Ping Zhang. 2009. **Chromatic Graph Theory**. CRC Press. United States.
- [5] Chartrand, G dkk. The locating chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**:89-101.
- [6] Godsil, C dan Gordon Royle. 2001. **Algebraic Graph Theory**. Springer. New York.
- [7] Hartsfield, N dan G. Ringel. 1994. **Pearls in Graph Theory A Comprehensive : Introduction Revised and Augmented**. Academic Press. San Diego.
- [8] Husodo, A.Y. Tanpa Tahun. *Aplikasi Pewarnaan Graf dalam Penyimpanan Senyawa Kimia Berbahaya*. ITB. Bandung.
- [9] Vasudev, C . 2006. **Graph theory with Application**. New Delhi. India.