Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **4** Hal. 33 – 38
ISSN : 2303–291X

KARAKTERISTIK RANK MATRIKS *FUZZY*

MUTIARA NOVITA SARI, NOVA NOLIZA BAKAR, MONIKA RIANTI HELMI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : mutiaranovitasani@gmail.com

Abstrak. Tulisan ini membahas tentang karakteristik rank dari matriks *fuzzy* dimana dalam menentukan rank pada matriks *fuzzy* berbeda dengan matriks biasa karena operasi penjumlahan dan perkalian pada matriks *fuzzy* menggunakan operasi maks-min yang dikenal dengan aljabar *fuzzy* maks-min [0,1]. Karakteristik rank yang dibahas pada tulisan ini adalah faktorisasi rank *fuzzy*, faktorisasi rank baris, faktorisasi rank kolom, dan faktorisasi rank.

Kata Kunci: Aljabar *Fuzzy* Maks-min, Ruang Baris, Ruang Kolom, Rank *Fuzzy*, Rank Baris, Rank Kolom

Diterima	:	*29 November 2018*
Direvisi	:	*3 Desember 2018*
Dipublikasikan	:	*30 Desember 2018*

1. Pendahuluan

Konsep himpunan *fuzzy* dikembangkan dalam bentuk matriks yang kemudian dikenal dengan nama matriks *fuzzy* oleh Thomson pada tahun 1977, kemudian teori dari matriks *fuzzy* dikembangkan lagi oleh Kim and Roush[2]. Matriks *fuzzy* juga memiliki perbedaan dengan matriks biasa dimana operasi-operasi pada matriks *fuzzy* menggunakan operasi *max-min* sehingga dalam menentukan rank di matriks *fuzzy* juga berbeda. Rank baris dalam matriks *fuzzy* didefinisikan sebagai jumlah anggota dalam himpunan pembangun minimal dari ruang baris matriks *fuzzy* [1]. Sedangkan rank kolom adalah rank baris dari transpos matriks *fuzzy*. Rank merupakan konsep mendasar untuk pengembangan teori matriks *fuzzy*. Tulisan ini akan membahas mengenai karakteristik rank matriks *fuzzy*.

2. Tinjauan Teori

2.1. *Aljabar* Fuzzy

Definisi 2.1. [1] *Aljabar fuzzy adalah sistem matematika* $(F, +, .)$ *dengan operasi* $+$ *dan* $\cdot$ *yang didefinisikan pada himpunan* F*, dimana untuk setiap* $a, b, c \in F$ *berlaku:*

(1) $a + a = a$ *dan* $a \cdot a = a$,
(2) $a + b = b + a$ *dan* $a \cdot b = b \cdot a$,
(3) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *dan* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

(4) $a + (a \cdot b) = a$ *dan* $a \cdot (a + b) = a$,
(5) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *dan* $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$,
(6) terdapat $0 \in F$ *sehingga* $a + 0 = a$ *dan* $a \cdot 0 = 0$,
(7) terdapat $1 \in F$ *sehingga* $a + 1 = 1$ *dan* $a \cdot 1 = a$.

Berikut contoh dari aljabar *fuzzy*. Misalkan himpunan $\mathcal{F} = [0{,}1]$ dengan operasi $(+,\cdot)$ didefinisikan sebagai : $a + b = maks\{a, b\}$ dan $a \cdot b = \min\{a, b\}$ untuk semua $a, b \in [0{,}1]$. Ini disebut aljabar *fuzzy* maks-min.

2.2. *Matriks* Fuzzy

Matriks *fuzzy* adalah matriks yang entri-entrinya merupakan aljabar *fuzzy* maks-min [0,1]. Misalkan *fuzzy* $\mathcal{F}_{mn}$ adalah notasi untuk himpunan matriks-matriks berukuran $m \times n$ atas aljabar *fuzzy* $\mathcal{F} = [0, 1]$. Elemen-elemen dari $\mathcal{F}_{mn}$ disebut matriks *fuzzy*. Matriks *fuzzy* juga merupakan suatu aljabar *fuzzy*. Berikut akan diberikan definisi-definisi pada matriks *fuzzy* sebagai pendukung dan pengimplementasian pada bab selanjutnya.

Definisi 2.2. [3] *Matriks* $A = [a_{ij}]$ *dikatakan matriks fuzzy, jika* $a_{ij} \in \mathcal{F} = [0, 1]$, *untuk setiap* $i,j \in \mathbb{R}$.

Definisi 2.3. [1] *Misalkan* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{F}_{mn}$ *dan* $B = [b_{ij}] \in \mathcal{F}_{mn}$, *maka* $A + B = [maks\{a_{ij}, b_{ij}\}] \in \mathcal{F}_{mn}$ *merupakan penjumlahan dari* A *dan* B.

Definisi 2.4. [1] *Misalkan* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{F}_{mn}$ *dan* $c \in \mathcal{F}$, *maka perkalian fuzzy yaitu perkalian skalar dengan skalar dibatasi pada* $\mathcal{F}$ *didefinisikan sebagai* $cA = [\min\{c, a_{ij}\}] \in \mathcal{F}_{mn}$.

Definisi 2.5. [1] *Misalkan* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{F}_{mn}$ *dan* $B = [b_{ij}] \in \mathcal{F}_{mn}$, *maka* $A \cdot B = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}\right] = [maks_k\{\min\{a_{ik}, b_{kj}\}\}] \in \mathcal{F}_{mn}$. *Hasil dari* AB *terdefinisi jika dan hanya jika jumlah kolom* A *sama dengan jumlah baris* B.

Definisi 2.6. [1] *Misalkan* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{F}_{mn}$, *transpos dari matriks* A *adalah hasil dari pertukaran baris-baris dengan kolom-kolom pada* A *yang dinotasikan dengan* A^T.

Matriks *fuzzy* dengan pengoperasian *maks-min* merupakan bagian terpenting pada pembahasan kali ini. Baris-baris pada matriks *fuzzy* merupakan vektor *fuzzy*, begitu juga dengan kolom-kolomnya. Untuk itu, akan dibahas mengenai ruang vektor atas aljabar *fuzzy*.

2.3. *Ruang Vektor atas Aljabar* Fuzzy

Ruang vektor atas aljabar *fuzzy* adalah ruang vektor yang elemen-elemennya memenuhi sifat-sifat aljabar *fuzzy*. Berikut akan diberikan definisi-definisi mengenai vektor *fuzzy* sebagai materi pendukung pada pembahasan.

Definisi 2.7. [1] *Misalkan* V_n *merupakan himpunan n-tuples* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *atas* $\mathcal{F}$. *Elemen-elemen dari* V_n *disebut vektor fuzzy berdimensi n. Operasi penjumlahan*

dan perkalian pada V_n didefinisikan sebagai berikut :
Untuk $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ di V_n berlaku
$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ dan $ax = (ax_1, ax_2, \cdots, ax_n)$ untuk suatu a $\in \mathcal{F}$

Sistem V_n dengan operasi penjumlahan dan perkalian *fuzzy* disebut ruang vektor *fuzzy*.

Definisi 2.8. [1] *Sebuah subruang dari V_n adalah subhimpunan W dari V_n sedemikian sehingga $\mathbf{0} \in W$ untuk setiap x,y $\in W$, $x + y \in W$.*

Contoh 2.9.
Misalkan $W = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$, maka W merupakan subruang dari V_3.

Definisi 2.10. [1] *Kombinasi linier dari elemen-elemen himpunan S adalah jumlah berhingga $\sum a_i v_i$ dimana $v_i \in S$ dan $a_i \in \mathcal{F}$. Himpunan dari semua kombinasi linier dari elemen-elemen S disebut pembangun dari S dan dinotasikan dengan $< S >$.*

3. Karakteristik Rank Matriks Fuzzy

Rank merupakan salah satu konsep dasar untuk pengembangan teori matriks $fuzzy$. Pada rank matriks $fuzzy$, rank kolom dan rank baris dari suatu matriks $fuzzy$ tidak sama. Selain itu, ada juga konsep rank yang disebut rank $fuzzy$. Ruang baris yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}(A)$, ruang kolom dinotasikan dengan $\mathbb{C}(A)$, rank baris dan rank kolom masing masing dinotasikan dengan $\rho_r(A)$ dan $\rho_c(A)$.

Definisi 3.1. [1] *Ruang baris yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}(A)$ dari matriks A berukuran $m \times n$ merupakan subruang dari V_n yang dibangun oleh baris -baris pada matriks A. Rank baris yang dinotasikan dengan $\rho_r(A)$ merupakan jumlah terkecil dari himpunan yang membangun $\mathbb{R}(A)$. $\mathbb{C}(A) = \mathbb{R}(A^T)$ dan $\rho_c(A) = \rho_r(A^T)$.*

Untuk matriks berhingga A, $\rho_r(A)$ adalah jumlah maksimum baris-baris yang bebas linier pada matriks A.

Teorema 3.2. [1] *Untuk $A, B \in \mathcal{F}_{mn}$ berlaku*

(1) $\mathbb{R}(B) \subseteq \mathbb{R}(A)$ jika dan hanya jika $B = XA$ untuk suatu $X \in \mathcal{F}_m$.
(2) $\mathbb{C}(B) \subseteq \mathbb{C}(A)$ jika dan hanya jika $B = AY$ untuk suatu $Y \in \mathcal{F}_n$.

Definisi 3.3. [1] *Misalkan $A \in \mathcal{F}_{mn}$. Rank fuzzy $\rho_f(A)$ adalah bilangan bulat terkecil t sedemikian sehingga $A = BC$, dimana $B \in \mathcal{F}_{mt}$ dan $C \in \mathcal{F}_{tn}$. Faktorisasi tersebut dinamakan faktorisasi rankfuzzy*

Teorema 3.4. [1] *Misalkan $A \in \mathcal{F}_{mn}$ dengan $\rho_r(A) = r$, maka terdapat matriks $B \in \mathcal{F}_{mr}$ dan $C \in \mathcal{F}_{rn}$ sedemikian sehingga $\rho_r(A) = \rho_r(C) = r$ dan $A = BC$. Faktorisasi ini disebut faktorisasi rank baris dari matriks A.*

Teorema 3.5. [1] *Misalkan $A \in \mathcal{F}_{mn}$ dengan $\rho_c(A) = s$, maka terdapat matriks $B \in \mathcal{F}_{ms}$ dan $C \in \mathcal{F}_{sn}$ sedemikian sehingga $\rho_c(A) = \rho_c(B) = s$ dan $A = BC$. Faktorisasi ini disebut faktorisasi rank kolom matriks A.*

Teorema 3.6. [1] *Misalkan* $A \in \mathcal{F}_{mn}$ *dengan* $\rho(A) = \rho_r(A) = \rho_c(A) = r$*, maka terdapat matriks* $B \in \mathcal{F}_{mr}$ *dan* $C \in \mathcal{F}_{rn}$ *sedemikian sehingga* $\rho(A) = \rho_c(B) = \rho_r(C) = r$ *dan* $A = BC$*. Faktorisasi ini disebut faktorisasi rank matriks A.*

Bukti. Berdasarkan pembuktian Teorema **??**, terdapat $B \in \mathcal{F}_{mr}$ dan $C \in \mathcal{F}_{rn}$ sedemikian sehingga $\rho_r(A) = \rho_r(C) = r$ dan berdasarkan Teorema 3.5 terdapat $B \in \mathcal{F}_{ms}$ dan $C \in \mathcal{F}_{sn}$ sedemikian sehingga $\rho_c(A) = \rho_c(B) = s$, sehingga $\rho_r(A) = r$ dengan $B \in \mathcal{F}_{mr}$ dan $C \in \mathcal{F}_{rn}$, maka $\rho_r(C) = r$ dan $\rho_c(A) = r$ dengan $B \in \mathcal{F}_{mr}$ dan $C \in \mathcal{F}_{rn}$, maka $\rho_c(B) = r$. Akibatnya $\rho_r(A) = \rho_c(A) = \rho_c(B) = \rho_r(C) = r$. Oleh karena itu, Teorema 3.6 terbukti. $\square$

Teorema 3.7. [1] *Misalkan* $A \in \mathcal{F}_{mn}$*. Rank fuzzy* $\rho_f(A)$ *memenuhi sifat-sifat berikut :*
1. $\rho_f(A) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_c(A)\}$.
2. $\rho_f(PAQ) \leq \rho_f(A)$*, untuk setiap* $P \in \mathcal{F}_{pm}$ *dan* $Q \in \mathcal{F}_{nq}$.

Bukti.

(1) Misalkan $A \in \mathcal{F}_{mn}$ dengan $\rho_r(A) = r$. Maka berdasarkan Teorema 3.4, A mempunyai faktorisasi rank baris, yakni $A = BC$, dengan $\rho_r(A) = \rho_r(C) = r, B \in \mathcal{F}_{mr}, C \in \mathcal{F}_{rn}$. Dengan menggunakan Definisi 3.3, maka $\rho_f(A) \leq \rho_r(A)$. Kemudian dari Teorema 3.5 diketahui bahwa $\rho_c(A) = \rho_c(B) = r$. Karena $\rho_f(A)$ merupakan bilangan bulat terkecil t sedemikian sehingga $A = BC$, maka $\rho_f(A) \leq \rho_c(A)$. Oleh karena itu, $\rho_f(A) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_c(A)\}$.
(2) Misalkan $\rho_f(A) = t$, maka dari Definisi 3.3 diperoleh t merupakan bilangan bulat terkecil sedemikian sehingga $A = BC$ adalah faktorisasi rank *fuzzy* dari A dengan $B \in \mathcal{F}_{mt}, C \in \mathcal{F}_{tn}$ Kemudian ambil $P \in \mathcal{F}_{pm}, Q \in \mathcal{F}_{nq}$, maka $PAQ = P(BC)Q = (PB)(CQ)$. Misalkan $PB = V$ dan $CQ = W$, maka $PAQ = VW$, dimana $V \in \mathcal{F}_{pt}$ dan $W \in \mathcal{F}_{tq}$, sehingga diperoleh sebuah faktorisasi untuk PAQ. Karena $\rho_f(A) = t$, maka berdasarkan Definisi 3.3 diperoleh $\rho_f(PAQ) \leq t$. Akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned} \rho_f(PAQ) &\leq \rho_f(A) = t, \\ \rho_f(PAQ) &\leq \rho_f(A). \end{aligned}$$ $\square$

Akibat 3.8. [1] *Misalkan* $A \in \mathcal{F}_{mn}$ *dan* $B \in \mathcal{F}_{np}$*, maka berlaku hal berikut: 1.* $\rho_f(AB) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_r(B)\}$.
2. $\rho_f(AB) \leq \min\{\rho_c(A), \rho_c(B)\}$.
3. $\rho_f(AB) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_r(B), \rho_c(A), \rho_c(B)\}$.

Akibat 3.9. [1] *Misal* $A \in \mathcal{F}_{mn}, B \in \mathcal{F}_{np}$,

(1) Jika $\rho_r(AB) = \rho_f(AB)$ *maka* $\rho_r(AB) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_r(B)\}$.
(2) Jika $\rho_c(AB) = \rho_f(AB)$*, maka* $\rho_c(AB) \leq \min\{\rho_c(A), \rho_c(B)\}$.

Bukti.

(1) Misal $A \in \mathcal{F}_{mn}, B \in \mathcal{F}_{np}$, $\rho_r(AB) = \rho_f(AB)$, kemudian berdasarkan Teorema 3.7 diketahui bahwa

$$\rho_f(AB) \leq \rho_f(A) \leq \rho_r(A) \ \ dan \ \ \rho_f(AB) \leq \rho_f(B) \leq \rho_r(B).$$

Karena $\rho_r(AB) = \rho_f(AB)$, maka $\rho_r(AB) \leq \rho_r(A)$ dan $\rho_r(AB) \leq \rho_r(B)$. Akibatnya diperoleh $\rho_f(AB) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_r(B)\}$.

(2. Misal $A \in \mathcal{F}_{mn}, B \in \mathcal{F}_{np}$, $\rho_c(AB) = \rho_f(AB)$, kemudian berdasarkan Teorema 3.7 diketahui bahwa

$$\rho_f(AB) \leq \rho_f(A) \leq \rho_c(A) \ \ dan \ \ \rho_f(AB) \leq \rho_f(B) \leq \rho_c(B).$$

Karena $\rho_c(AB) = \rho_f(AB)$, maka $\rho_c(AB) \leq \rho_c(A)$ dan $\rho_c(AB) \leq \rho_c(B)$. Akibatnya diperoleh $\rho_f(AB) \leq \min\{\rho_c(A), \rho_c(B)\}$. □

Akibat 3.10. [1] *Untuk $A \in \mathcal{F}_{mn}$, berlaku :*
1. $\rho_f(AA^T) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_c(A)\}$.
2. $\rho_f(A^TA) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_c(A)\}$.

4. Kesimpulan

Rank merupakan salah satu konsep dasar untuk pengembangan teori matriks $fuzzy$. Pada rank matriks $fuzzy$, rank kolom dan rank baris dari suatu matriks $fuzzy$ tidak sama. Selain itu, ada juga konsep rank yang disebut rank $fuzzy$. Berikut diperoleh beberapa karaterikstik rank dari matriks $fuzzy$, diantaranya :

(1) Untuk $A, B \in \mathcal{F}_{mn}$ berlaku
  (a) $\mathbb{R}(B) \subseteq \mathbb{R}(A)$ jika dan hanya jika $B = XA$ untuk suatu $X \in \mathcal{F}_m$.
  (b) $\mathbb{C}(B) \subseteq \mathbb{C}(A)$ jika dan hanya jika $B = AY$ untuk suatu $Y \in \mathcal{F}_n$.

(2) Misalkan $A \in \mathcal{F}_{mn}$ dengan $\rho_r(A) = r$, maka terdapat matriks $B \in \mathcal{F}_{mr}$ dan $C \in \mathcal{F}_{rn}$ sedemikian sehingga $\rho_r(A) = \rho_r(C) = r$ dan $A = BC$. Faktorisasi ini disebut faktorisasi rank baris dari matriks A.

(3) Misalkan $A \in \mathcal{F}_{mn}$ dengan $\rho_c(A) = s$, maka terdapat matriks $B \in \mathcal{F}_{ms}$ dan $C \in \mathcal{F}_{sn}$ sedemikian sehingga $\rho_c(A) = \rho_c(B) = s$ dan $A = BC$. Faktorisasi ini disebut faktorisasi rank kolom matriks A.

(4) Misalkan $A \in \mathcal{F}_{mn}$ dengan $\rho(A) = \rho_r(A) = \rho_c(A) = r$, maka terdapat matriks $B \in \mathcal{F}_{mr}$ dan $C \in \mathcal{F}_{rn}$ sedemikian sehingga $\rho(A) = \rho_c(B) = \rho_r(C) = r$ dan $A = BC$. Faktorisasi ini disebut faktorisasi rank matriks A.

(5) Misalkan $A \in \mathcal{F}_{mn}$. Rank fuzzy $\rho_f(A)$ memenuhi sifat-sifat berikut :
1. $\rho_f(A) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_c(A)\}$.
2. $\rho_f(PAQ) \leq \rho_f(A)$, untuk setiap $P \in \mathcal{F}_{pm}$ dan $Q \in \mathcal{F}_{nq}$.

(6) Misal $A \in \mathcal{F}_{mn}, B \in \mathcal{F}_{np}$, berlaku :
1.Jika $\rho_r(AB) = \rho_f(AB)$ maka $\rho_r(AB) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_r(B)\}$.
2.Jika $\rho_c(AB) = \rho_f(AB)$, maka $\rho_c(AB) \leq \min\{\rho_c(A), \rho_c(B)\}$.

(7) Untuk $A \in \mathcal{F}_{mn}$, berlaku :
1. $\rho_f(AA^T) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_c(A)\}$.
2. $\rho_f(A^TA) \leq \min\{\rho_r(A), \rho_c(A)\}$.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Yanita, Ibu Izzati Rahmi HG M,Si, dan Ibu Riri Lestari M,Si yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] Meenakshi, A.R. 2008. *Fuzzy Matrix Theory and Applications*, MJP Publishers, India

[2] Kim,K.H dan Roush, F.W., Generalized fuzzy matrices, *Fuzzy Sets and Systems* **4**: 293 – 315 (1980)

[3] Sidky, F.I and E.G. Enam. 1992. Some Remarks on Section of a Fuzzy Matrix, *Journal of King Abdulaziz University.* Sci **4**: 145 – 155

[4] M.G. Thomson. 1977. Convergence of power of a fuzzy matrix, *Journal of Mathematical Analysis and Aplications*, **57**: 476 – 480