DIMENSI PARTISI GRAF SPINNER $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$ UNTUK $n = 1$ DAN $n = 2$

SUCI YEFRI FADILLAH, LYRA YULIANTI, SYAFRIZAL SY

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : suciyefri16@gmail.com*

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf terhubung, Misal $V(G)$ dipartisi menjadi k buah himpunan, $S_1, S_2, \dots, S_k$ yang saling lepas. Definisikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ sebagai himpunan yang berisikan k -partisi tersebut. Misalkan terdapat titik $V \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), \dots, d(v, S_k))$. Jika setiap titik di G memiliki representasi yang berbeda terhadap Π , maka Π disebut partisi penyelesaian graf G . Kardinalitas minimum dari partisi penyelesaian disebut dimensi partisi dari G dinotasikan $pd(G)$. Hasil perkalian kartesius antara graf lingkaran C_3 dengan graf lintasan P_2 , disimbolkan dengan $C_3 \times P_2$. Kemudian hasil perkalian kartesius tersebut, diberikan operasi korona dengan komplemen dari graf lengkap K_n yang dinotasikan dengan $\overline{K_n}$, sehingga didapatkan graf baru yang diberi nama graf spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$, untuk $n \geq 1$.

Kata Kunci: Dimensi partisi, Hasil Perkalian Kartesius, Graf Spinner, Korona

Diterima : 29 November 2018
 Direvisi : 3 Desember 2018
 Dipublikasikan : 30 Desember 2018

1. Pendahuluan

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf terhubung, Misal $V(G)$ dipartisi menjadi k buah himpunan, $S_1, S_2, \dots, S_k$ yang saling lepas. Definisikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ sebagai himpunan yang berisikan k -partisi tersebut. Misalkan terdapat titik $V \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), \dots, d(v, S_k))$. Jika setiap titik di G memiliki representasi yang berbeda terhadap Π , maka Π disebut partisi penyelesaian graf G . Kardinalitas minimum dari partisi penyelesaian disebut dimensi partisi dari G dinotasikan $pd(G)$.

Pembahasan kajian tentang dimensi partisi sudah banyak, seperti yang dibahas oleh Chartrand dkk [3] yang mengkaji dimensi partisi dari beberapa graf terhubung, Darmaji [5] yang mengkaji tentang dimensi partisi dari graf multipartit dan hasil korona dari graf terhubung. Pada tugas akhir ini akan dibahas tentang bagaimana menentukan dimensi partisi suatu graf baru dari hasil perkalian kartesius antara graf lingkaran C_3 dengan graf lintasan P_2 , disimbolkan dengan $C_3 \times P_2$. Kemudian hasil perkalian kartesius tersebut, diberikan operasi korona dengan komplemen dari graf lengkap K_n yang dinotasikan dengan $\overline{K_n}$, sehingga didapatkan graf baru yang diberi nama graf spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$, untuk $n \geq 1$.

2. Landasan Teori

2.1. Definisi dan Terminologi Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari titik-titik (*vertices*) dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik. Graf yang hanya memiliki sebuah titik disebut graf *trivial*. Sebuah graf dikatakan sederhana jika tidak memiliki *loop* dan sisi ganda. Pada tulisan ini graf yang dibahas adalah graf sederhana.

Sebuah jalan (*walk*) di G adalah barisan terbatas yang tidak kosong $W = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$. Jika sisi-sisi $e_1, e_2, \dots, e_n$ pada suatu jalan semuanya berbeda maka W dikatakan sebagai jejak (*trail*). Jika ditambahkan bahwa $v_0, v_1, \dots, v_n$ adalah titik-titik yang berbeda maka W dikatakan sebagai sebuah lintasan (*path*). Lintasan dengan panjang n dilambangkan dengan P_n . Titik u dan v dikatakan terhubung jika terdapat sebuah lintasan dari u ke v di G . Graf G dikatakan graf terhubung (*connected graph*) jika untuk sebarang titik u dan v di G saling terhubung. Jarak dari u ke v dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v di G . Diameter dari G adalah maksimum jarak antara dua titik di G yang dinotasikan dengan $diam(G)$.

Suatu jalan dikatakan tertutup jika memiliki titik asal dan titik ujung yang sama. Sebuah jejak tertutup yang titik asal dan titik internalnya berbeda dinamakan lingkaran (*cycle*). Graf Lengkap (*complete graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya saling bertetangga. Komplemen suatu graf G , dinotasikan dengan $\overline{G}$. Graf $\overline{G}$ memiliki himpunan titik yang sama dengan himpunan titik graf G , yaitu $V(\overline{G}) = V(G)$ dan dengan sifat bahwa dua titik di G yang bertetangga, jika hanya jika dua titik yang sama dalam $\overline{G}$ tidak bertetangga.

2.2. Graf Hasil Perkalian Kartesius

Perkalian kartesius antara graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dengan graf $G_2 = (V_2, E_2)$, dinotasikan dengan $G_1 \times G_2$. Perkalian $G_1 \times G_2$ menghasilkan sebuah graf baru, yaitu graf G yang memiliki himpunan titik $V_1 \times V_2$. Dua buah titik (u_1, u_2) dan $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ dikatakan bertetangga di $G_1 \times G_2$ jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E_2$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E_1$.

2.3. Graf Hasil Korona

Misal terdapat dua graf G dan H dengan $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $V(H) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Misal terdapat graf H_i , dengan $V(H_i) = \{y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im}\}$, dimana H_i adalah duplikat ke- i dari graf H . Maka graf $G \odot H$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i=1}^n V(H_i),$$

$$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{i=1}^n E(H_i) \cup \{x_i y_{ij} \mid 1 \leq j \leq m, y_i \in V(H_i)\},$$

dengan H_i adalah duplikat dari H .

2.4. Dimensi Partisi

Definisi 2.1. [5] Misalkan $G = (V, E)$ merupakan suatu graf terhubung dan misalkan $S \subseteq V(G)$. Selanjutnya misalkan terdapat sebuah titik $v \in V(G)$. Maka jarak titik v terhadap S didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x) | x \in S\}$.

Definisi 2.2. [5] Misalkan $G = (V, E)$ merupakan suatu graf terhubung u, v adalah sebarang dua titik di G . $\text{diam}(G)$ didefinisikan sebagai jarak maksimum antara setiap dua titik di G , dinotasikan sebagai $\text{diam}(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$.

Definisi 2.3. [4] Misalkan G adalah suatu graf terhubung. Himpunan titik $V(G)$ dipartisi menjadi beberapa partisi, yaitu $S_1, S_2, \dots, S_k$. Notasikan Π sebagai suatu himpunan terurut dari k -partisi, tulis $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$. Misalkan terdapat sebuah titik v di G . Maka representasi v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. Jika setiap titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π , maka Π disebut sebagai partisi penyelesaian. Kardinalitas yang minimum dari k -partisi penyelesaian terhadap $V(G)$ disebut dengan dimensi partisi dari G , dinotasikan dengan $\text{pd}(G)$.

Teorema 2.4. [4] Misalkan G suatu graf terhubung dengan orde $n \geq 2$. Maka $\text{pd}(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$.

Lema 2.5. [4] Misalkan G suatu graf terhubung tak trivial. Misalkan Π suatu partisi penyelesaian dari G dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka u dan v harus termuat dalam partisi yang berbeda di Π .

3. Penentuan Dimensi Partisi dari Graf Spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$ untuk $n = 1$ dan $n = 2$

Graf spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$ adalah graf yang terbentuk dari hasil perkalian kartesius antara graf lingkaran C_3 dengan graf lintasan P_2 , dinotasikan dengan $(C_3 \times P_2)$, kemudian hasil dari perkalian tersebut dikoronakan dengan komplemen graf lengkap dengan n titik $(\overline{K_n})$, $n = 1$ dan $n = 2$ [1].

Himpunan titik dan himpunan sisi dari graf spinner adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V((C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}) &= \{x_1, x_2, \dots, x_6\} \cup \bigcup_{i=1}^6 V(\overline{K_{in}}), \\ E((C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}) &= \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3\} \cup \{x_4x_5, x_5x_6, x_4x_6\} \cup \\ &\quad \{x_1x_4, x_2x_5, x_3x_6\} \cup \{x_ix_{ij}, 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq n\}, \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} |V(C_3 \times P_2 \odot \overline{K_n})| &= |V(C_3)| \cdot |V(P_2)| + |V(C_3)| \cdot |V(P_2)| \cdot |V(\overline{K_n})|, \\ &= |V(C_3)| \cdot |V(P_2)| \cdot (1 + |V(\overline{K_n})|), \\ &= 3 \cdot 2 \cdot (1 + n), \\ &= 6(n + 1), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 |E(C_3 \times P_2 \odot \overline{K_n})| &= |E(C_3)| \cdot |V(P_2)| + |V(C_3)| \cdot |E(P_2)| + \\
 &\quad |V(C_3)| \cdot |V(P_2)| \cdot |V(\overline{K_n})|, \\
 &= 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot n, \\
 &= 9 + 6n, \text{ untuk } n \geq 1.
 \end{aligned}$$

Teorema 3.1. Misalkan terdapat graf spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1}$ dan $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_2}$. Maka

$$pd((C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1}) = 4.$$

Bukti. Pandang dua kasus berikut.

Kasus 1. $G \cong (C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1}$. Akan ditunjukkan bahwa $pd(G) = 4$.

Gambar 1. Graf $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1}$

- (i) Akan ditunjukkan bahwa $pd(G) \geq 4$. Andaikan partisi penyelesaian $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dari G , untuk $n = 1$. Dapat dilihat bahwa graf G merupakan graf tak trivial yang memuat cycle. Jika salah satu titik x_{11}, x_{21}, x_{31} berada pada partisi yang sama dengan x_{41}, x_{51}, x_{61} , maka akan terdapat minimal dua titik yang memiliki representasi yang sama. Akibatnya $pd(G) \geq 4$, untuk $n = 1$.
- (ii) Akan ditunjukkan $pd(G) \leq 4$, untuk $n = 1$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ adalah partisi penyelesaian dari graf G dengan kelas partisi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{11}, x_{21}, x_{31}\}, \\
 S_2 &= \{x_{41}\}, \\
 S_3 &= \{x_{51}\}, \\
 S_4 &= \{x_{61}\}.
 \end{aligned}$$

Berdasarkan kelas partisi diatas diperoleh representasi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
r(x_1|\Pi) &= (d(x_1, S_1), d(x_1, S_2), d(x_1, S_3), d(x_1, S_4)) = (0, 2, 3, 3), \\
r(x_2|\Pi) &= (d(x_2, S_1), d(x_2, S_2), d(x_2, S_3), d(x_2, S_4)) = (0, 3, 2, 3), \\
r(x_3|\Pi) &= (d(x_3, S_1), d(x_3, S_2), d(x_3, S_3), d(x_3, S_4)) = (0, 3, 3, 2), \\
r(x_4|\Pi) &= (d(x_4, S_1), d(x_4, S_2), d(x_4, S_3), d(x_4, S_4)) = (0, 1, 2, 3), \\
r(x_5|\Pi) &= (d(x_5, S_1), d(x_5, S_2), d(x_5, S_3), d(x_5, S_4)) = (0, 2, 1, 2), \\
r(x_6|\Pi) &= (d(x_1, S_1), d(x_1, S_2), d(x_1, S_3), d(x_1, S_4)) = (0, 2, 2, 1), \\
r(x_{11}|\Pi) &= (d(x_{11}, S_1), d(x_{11}, S_2), d(x_{11}, S_3), d(x_{11}, S_4)) = (0, 3, 4, 4), \\
r(x_{21}|\Pi) &= (d(x_{21}, S_1), d(x_{21}, S_2), d(x_{21}, S_3), d(x_{21}, S_4)) = (0, 4, 3, 3), \\
r(x_{31}|\Pi) &= (d(x_{31}, S_1), d(x_{31}, S_2), d(x_{31}, S_3), d(x_{31}, S_4)) = (0, 4, 4, 3), \\
r(x_{41}|\Pi) &= (d(x_{41}, S_1), d(x_{41}, S_2), d(x_{41}, S_3), d(x_{41}, S_4)) = (1, 0, 3, 3), \\
r(x_{51}|\Pi) &= (d(x_{51}, S_1), d(x_{51}, S_2), d(x_{51}, S_3), d(x_{51}, S_4)) = (1, 3, 0, 3), \\
r(x_{61}|\Pi) &= (d(x_{61}, S_1), d(x_{61}, S_2), d(x_{61}, S_3), d(x_{61}, S_4)) = (1, 3, 3, 0).
\end{aligned}$$

Karena setiap titik pada graf G memiliki representasi yang berbeda, maka Π merupakan partisi penyelesaian dari graf G . Jadi diperoleh bahwa $pd(G) \leq 4$, untuk $n = 1$.

Dari pembuktian diatas maka dapat disimpulkan $pd(G) = 4$ untuk $n = 1$.

Kasus.2 Misalkan $G \cong (C_3 \times P_2) \odot \overline{K_2}$. Akan ditunjukkan $pd(G) = 4$.

Gambar 2. Graf $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_2}$

- (i) Akan ditunjukkan $pd(G) \geq 4$. Misalkan $\Pi = 3$ partisi penyelesaian dari graf G . Berdasarkan kasus 1, untuk $n = 1$ terdapat titik yang memiliki nilai representasi yang sama, sehingga untuk $n = 2$ juga akan terdapat minimal dua titik yang memiliki nilai representasi yang sama. Akibatnya $pd(G) \geq 4$.
- (ii) Untuk $n = 2$, akan ditunjukkan $pd(G) \leq 4$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ adalah partisi penyelesaian dari graf G dengan kelas partisi sebagai berikut.

$$S_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{61}\},$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \{x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52}, x_{62}\}, \\
S_3 &= \{x_{41}\}, \\
S_4 &= \{x_{51}\},
\end{aligned}$$

Berdasarkan kelas partisi diatas diperoleh representasi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
r(x_1|\Pi) &= (d(x_1, S_1), d(x_1, S_2), d(x_1, S_3), d(x_1, S_4)) = (0, 1, 2, 3), \\
r(x_2|\Pi) &= (d(x_2, S_1), d(x_2, S_2), d(x_2, S_3), d(x_2, S_4)) = (0, 1, 3, 2), \\
r(x_3|\Pi) &= (d(x_3, S_1), d(x_3, S_2), d(x_3, S_3), d(x_3, S_4)) = (0, 1, 3, 3), \\
r(x_4|\Pi) &= (d(x_4, S_1), d(x_4, S_2), d(x_4, S_3), d(x_4, S_4)) = (0, 1, 1, 2), \\
r(x_5|\Pi) &= (d(x_5, S_1), d(x_5, S_2), d(x_5, S_3), d(x_5, S_4)) = (0, 1, 2, 1), \\
r(x_6|\Pi) &= (d(x_6, S_1), d(x_6, S_2), d(x_6, S_3), d(x_6, S_4)) = (0, 1, 2, 2), \\
r(x_{11}|\Pi) &= (d(x_{11}, S_1), d(x_{11}, S_2), d(x_{11}, S_3), d(x_{11}, S_4)) = (0, 2, 3, 4), \\
r(x_{21}|\Pi) &= (d(x_{21}, S_1), d(x_{21}, S_2), d(x_{21}, S_3), d(x_{21}, S_4)) = (0, 2, 4, 3), \\
r(x_{31}|\Pi) &= (d(x_{31}, S_1), d(x_{31}, S_2), d(x_{31}, S_3), d(x_{31}, S_4)) = (0, 2, 4, 4), \\
r(x_{41}|\Pi) &= (d(x_{41}, S_1), d(x_{41}, S_2), d(x_{41}, S_3), d(x_{41}, S_4)) = (1, 2, 0, 3), \\
r(x_{51}|\Pi) &= (d(x_{51}, S_1), d(x_{51}, S_2), d(x_{51}, S_3), d(x_{51}, S_4)) = (1, 2, 3, 0), \\
r(x_{61}|\Pi) &= (d(x_{61}, S_1), d(x_{61}, S_2), d(x_{61}, S_3), d(x_{61}, S_4)) = (0, 2, 3, 3), \\
r(x_{12}|\Pi) &= (d(x_{12}, S_1), d(x_{12}, S_2), d(x_{12}, S_3), d(x_{12}, S_4)) = (1, 0, 3, 4), \\
r(x_{22}|\Pi) &= (d(x_{22}, S_1), d(x_{22}, S_2), d(x_{22}, S_3), d(x_{22}, S_4)) = (1, 0, 4, 3), \\
r(x_{32}|\Pi) &= (d(x_{32}, S_1), d(x_{32}, S_2), d(x_{32}, S_3), d(x_{32}, S_4)) = (1, 0, 4, 4), \\
r(x_{42}|\Pi) &= (d(x_{42}, S_1), d(x_{42}, S_2), d(x_{42}, S_3), d(x_{42}, S_4)) = (1, 0, 2, 3), \\
r(x_{52}|\Pi) &= (d(x_{52}, S_1), d(x_{52}, S_2), d(x_{52}, S_3), d(x_{52}, S_4)) = (1, 0, 3, 2), \\
r(x_{62}|\Pi) &= (d(x_{62}, S_1), d(x_{62}, S_2), d(x_{62}, S_3), d(x_{62}, S_4)) = (1, 0, 3, 3).
\end{aligned}$$

Karena setiap titik pada G memiliki representasi yang berbeda, maka Π merupakan partisi penyelesaian dari graf G . Jadi diperoleh $pd(G) \leq 4$.

Jadi dari pembuktian diatas diperoleh $pd(G) = 4$. $\square$

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah ditentukan dimensi partisi untuk graf $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$, untuk $n = 1$ dan $n = 2$ adalah 4.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Narwen, M.Si, ibu Dr. Susila Bahri, dan bapak Efendi, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Azizu, K.A, et. al. 2018. Pelabelan Total Sisi Ajaib Super pada Graf Prisma Bercabang. *Jurnal Matematika Unand*. **1**: 130 – 108
- [2] Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London
- [3] Chartrand, et. al. 1998. On The Partition Dimension of a Graph. *Congressus Numerantium*. **130**: 157 – 168

- [4] Chartrand, G. Salehi E. dan Zhang, P. 2000. The Partition Dimension of Resolvability in Graphs. *Aequationes Math.* **59**: 45 – 54
- [5] Darmaji. 2011. Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Buah Graf Terhubung. *Disertasi Program Studi Doktor Matematika ITB*, tidak diterbitkan.
- [6] Sari, P.W, et. al. 2017. Pendadwalan Kuliah dengan Algoritma Welsh Powell. *Jurnal Matematika Unand.* **1**: 134 – 141
- [7] Wilson, R.J. 1972. *Introduction to Graph Theory*. Longman Inc, New York