Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **1** Hal. 32 – 36
ISSN : 2303–291X

PELABELAN TOTAL (a, d)-SISI ANTIAJAIB SUPER PADA $K_{1,m} \cup K_{1,n}$ untuk $d = 1$ atau $d = 2$

DINA YELNI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
dinayelni@gmail.com

Abstrak. Misalkan G adalah suatu graf dengan banyaknya titik p dan banyaknya sisi q. Pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib dari graf G adalah suatu fungsi bijektif $f : (V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, 3, \cdots, p+q\}$ sehingga bobot sisi $w(u, v) = f(u) + f(v) + f(uv)$ dengan $uv \in (G)$ membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d. Suatu pelabelan total dari graf G dikatakan super jika $f(V) = \{1, 2, 3, \cdots, p\}$. Dalam paper ini, pelabelan yang dibahas adalah pelabelan pada gabungan dua graf bintang $K_{1,m}$ dan $K_{1,n}$, untuk $m \geq n \geq 2$.

Kata Kunci: Graf Bintang, Pelabelan Graf, Pelabelan Total (a, d)-Sisi Antiajaib.

1. Pendahuluan

Salah satu kajian dalam teori graf yang memiliki properti matematika yang menarik dan memiliki aplikasi yang luas dalam berbagai bidang dan permasalahan adalah teori pelabelan graf. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Hingga saat ini teori pelabelan graf sangat dirasakan manfaatnya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan juga desain circuit gabungan pada komponen elektronik. Pelabelan terhadap graf G adalah suatu pemetaan bijektif dari setiap elemen graf ke bilangan bulat positif, yang mana bilangan tersebut disebut dengan label.

Terdapat beberapa jenis pelabelan graf, diantaranya adalah pelabelan ajaib dan pelabelan antiajaib. Pelabelan ajaib diperkenalkan oleh Sedlacek (1963) dan pelabelan antiajaib diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel (1989). Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang sama, maka graf ini disebut graf dengan pelabelan ajaib. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda maka graf ini disebut graf dengan pelabelan antiajaib. Dalam pelabelan antiajaib dikenal pula beberapa istilah seperti pelabelan titik (a, d)-sisi antiajaib, pelabelan sisi (a, d)-titik antiajaib, pelabelan total (a, d)-titik antiajaib, serta pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib.

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$. Pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib dari graf G adalah suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, 3, \cdots, p+q\}$ sehingga himpunan bobot sisi $W(uv) = \{w(uv) | w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv), uv \in (G)\}$ membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d. Suatu pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib dikatakan super jika $f(V) = \{1, 2, 3, \cdots, p\}$ dan $f(E) = \{p+1, p+2, p+3, \cdots, p+q\}$. Pada makalah ini penulis akan melakukan kajian kembali mengenai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super, khususnya pada graf yang merupakan gabungan dua graf bintang $K_{1,m} \cup K_{1,n}$. Graf bintang $K_{1,n}$ mempunyai satu titik berderajat n, sementara n titik lainnya berderajat satu.

Berikut ini adalah teorema dan lema yang digunakan untuk menentukan pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada grabungan dua graf bintang.

Teorema 1.1. [2] *Misalkan m, n adalah bilangan bulat positif dengan $m \geq n \geq 2$, maka graf $K_{1,n} \cup K_{1,m}$ mempunyai suatu pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib jika dan hanya jika m adalah kelipatan dari $(n + 1)$.*

Lema 1.2. [4] *Misalkan terdapat barisan $\mathcal{A} = \{c, c+1, c+2, \cdots, c+k\}$, untuk suatu k genap, maka terdapat suatu permutasi $\Pi(\mathcal{A})$ dari elemen $\mathcal{A}$ sedemikian sehingga $\mathcal{A} + \Pi(\mathcal{A}) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \cdots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\}$.*

2. Pelabelan Total (a, d)-Sisi Antiajaib pada Gabungan Graf Bintang

Makalah ini mengkaji kembali paper [2] tentang pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada gabungan graf bintang $K_{1,m} \cup K_{1,n}$, untuk $m \geq n \geq 2$ dan m adalah kelipatan dari $(n + 1)$.

Teorema 2.1. [2] *Jika $m \geq n \geq 2$ dan m adalah kelipatan dari $(n + 1)$, maka graf $K_{1,m} \cup K_{1,n}$ mempunyai pelabelan total $(a, 2)$-sisi antiajaib super.*

Bukti. Misalkan $m \geq n \geq 2$ dan $m = t(n+1)$ untuk suatu konstanta $t \in \mathbf{N}$, maka pelabelan titik untuk graf $K_{1,m} \cup K_{1,n}$ dikonstruksikan sebagai berikut.

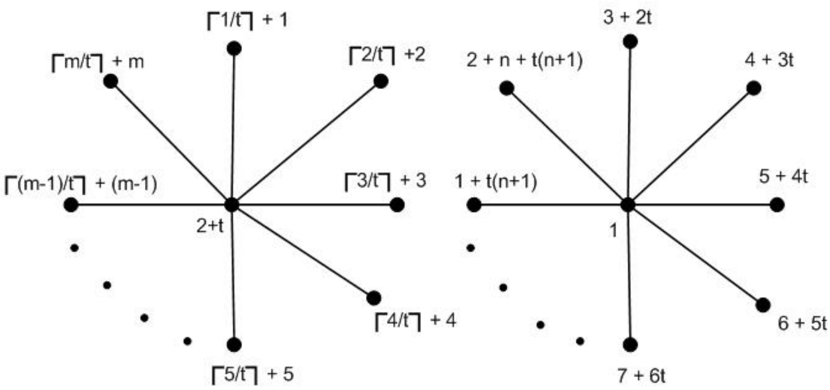
$$f_1(x_{1,j}) = \begin{cases} 2 + t, & \text{jika} \;\; j = 0, \\ \lceil \frac{j}{t} \rceil + j, & \text{jika} \;\; 1 \leq j \leq m, \end{cases}$$

dengan $\lceil x \rceil$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x, untuk x sembarang bilangan riil, dan

$$f_1(x_{2,i}) = \begin{cases} 1, & \text{jika} \;\; i = 0, \\ 1 + (i+1)(t+1), & \text{jika} \;\; 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Maka diperoleh himpunan label titik untuk graf $K_{1,m}$ dan graf $K_{1,n}$ sebagai berikut.

$$f_1(V(K_{1,m})) = \left\{(2+t), \left\lceil \frac{1}{t} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{2}{t} \right\rceil + 2, \left\lceil \frac{3}{t} \right\rceil + 3, \cdots, \left\lceil \frac{m}{t} \right\rceil + m \right\}, \text{ dan}$$
$$f_1(V(K_{1,n})) = \{1, (3+2t), (4+3t), (5+4t), \cdots, (2+n+t(n+1)\}$$



Gambar 1. Pelabelan titik pada graf $K_{1,m} \cup K_{1,n}$

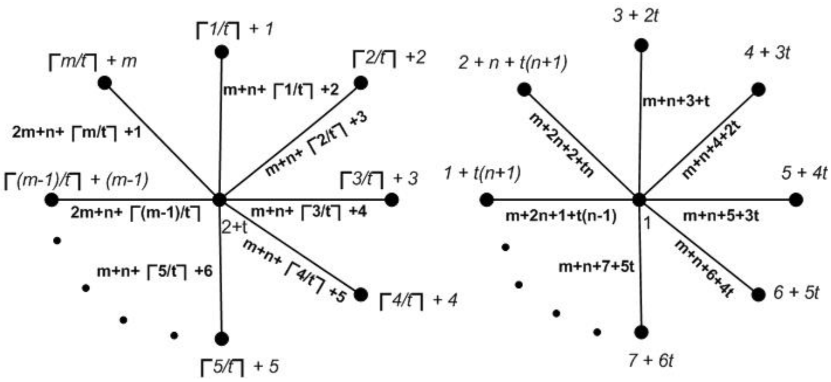
Diperoleh bobot sisi untuk graf $K_{1,m} \cup K_{1,n}$ terhadap pelabelan f_1 berikut.

$$\begin{aligned} W^1_{f_1} \cup W^2_{f_1} &= \{w^1_{f_1}(x_{1,0}x_{1,j})|1 \le j \le m\} \cup \{w^2_{f_1}(x_{2,0}x_{2,i})|1 \le i \le n\}, \\ &= \{f(x_{1,0}) + f(x_{1,j})|1 \le j \le m\} \cup \{f(x_{2,0}) + f(x_{2,1})|1 \le i \le n\}, \\ &= \{2 + t + \lceil \frac{j}{t} \rceil + j|1 \le j \le m\} \cup \{2 + (i+1)(t+1)|1 \le i \le n\}, \\ &= \{t+4, t+5, t+6, \cdots, m+n+t+3\}. \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa himpunan tersebut merupakan barisan aritmatika dengan suku awal $t + 4$ dan suku akhir $m + n + t + 3$, serta beda $d = 1$. Sehingga dapat dilihat bahwa f_1 adalah pelabelan titik $(t + 4, 1)$-sisi antiajaib.

Selanjutnya didefinisikan pelabelan sisi $f_2 : E(K_{1,m} \cup K_{1,n})$, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_2(x_{1,0}x_{1,j}) &= m + n + 1 + \left\lceil \frac{j}{t} \right\rceil + j \quad \text{untuk} \quad 1 \le j \le m, \\ f_2(x_{2,0}x_{2,i}) &= m + n + 2 + i(t+1) \quad \text{untuk} \quad 1 \le i \le n. \end{aligned}$$



Gambar 2. Pelabelan total pada graf $K_{1,m} \cup K_{1,n}$

Maka untuk $t \in \mathbf{N}$, diperoleh suatu himpunan terurut dari pelabelan sisi $f_2(x_{1,0}x_{1,j}) \cup f_2(x_{2,0}x_{2,i})$, yaitu :

$$f_2 : E(K_{1,m} \cup K_{1,n}) \to \{m + n + 3, m + n + 4, m + n + 5, \cdots , 2m + 2n + 2\}.$$

Bobot sisi untuk graf $K_{1,m} \cup K_{1,n}$ terhadap pelabelan f_2, dapat dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W^1_{f_2} \cup W^2_{f_2} &= \{w^1_{f_2}(x_{1,0}x_{1,j})|1 \leq j \leq m\} \cup \{w^2_{f_2}(x_{2,0}x_{2,i})|1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{w^1_{f_1}(x_{1,0}x_{1,j}) + f_2(x_{1,0}x_{1,j})|1 \leq j \leq m\} \cup \{w^2_{f_1}(x_{2,0}x_{2,i}) + f_2(x_{2,0}x_{2,i})|1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{m + n + t + 3 + 2\lceil \frac{j}{t} \rceil + 2j|1 \leq j \leq m\} \cup \{m + n + 4 + (2i + 1)(t + 1)|1 \leq i \leq n\}, \\ &= \{m + n + t + 7, m + n + t + 9, m + n + t + 11, \cdots , 3m + 3n + t + 5\}. \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa himpunan tersebut merupakan barisan aritmatika dengan suku awal $m + n + t + 7$ dan suku akhir $3m + 3n + t + 5$, serta beda $d = 2$. Karena pelabelan titik sudah dilabeli dari $\{1, 2, 3, \cdots , p\}$, maka dapat disimpulkan bahwa f_2 mempunyai pelabelan total $(m + n + t + 7, 2)$-sisi antiajaib super. □

Teorema 2.2. [2] *Jika $(m + n)$ adalah ganjil, $m \geq n \geq 2$ dan m kelipatan dari $(n+1)$, maka graf $K_{1,m} \cup K_{1,n}$ mempunyai pelabelan total $(a, 1)$-sisi antiajaib super.*

Bukti. Misalkan $(m + n)$ adalah ganjil, $m \geq n \geq 2$ dan $m = t(n + 1)$ untuk suatu $t \in \mathbf{N}$. Maka berdasarkan Teorema 2.1, graf $K_{1,m} \cup K_{1,n}$ mempunyai pelabelan titik $(t + 4, 1)$-sisi antiajaib. Didefinisikan pelabelan titik f_3 sebagai berikut.

$$f_3(V(K_{1,m} \cup K_{1,n})) = f_1(V(K_{1,m} \cup K_{1,n})),$$

dan himpunan bobot sisi terhadap pelabelan f_3 adalah sebagai berikut.

$$W^1_{f_3} \cup W^2_{f_3} = \{t + 4, t + 5, t + 6, \cdots , m + n + t + 3\}.$$

Dengan dimisalkan $c = t + 4$, $k = m + n - 1$, dan $W^1_{f_3} \cup W^2_{f_3}$ dapat dinotasikan sebagai himpunan $\mathcal{A}$, maka diperoleh:

$$\mathcal{A} = \{c, c + 1, c + 2, \cdots , c + k\}.$$

Karena $(m + n)$ adalah ganjil, $k = ((m + n) - 1)$ bernilai genap dan himpunan $\mathcal{A}$ dapat ditulis sebagai barisan $\mathcal{A}$, maka berdasarkan Lema 1.2, terdapat suatu permutasi $\Pi(\mathcal{A})$ dari elemen-elemen $\mathcal{A}$, di mana suatu permutasi $\Pi(\mathcal{A})$ didefinisikan seperti pada [4], yaitu

$$\Pi(\mathcal{A}) = \{b_i|1 \leq i \leq k + 1\} = \begin{cases} c + \frac{k}{2} + \frac{1-i}{2}, & \text{jika } i \text{ ganjil }, \ 1 \leq i \leq k + 1, \\ c + k + \frac{2-i}{2}, & \text{jika } i \text{ genap }, \ 2 \leq i \leq k, \end{cases}$$

sedemikian sehingga

$$\mathcal{A} + \Pi(\mathcal{A}) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \cdots , 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\}.$$

Misalkan $[\Pi(\mathcal{A}) - c + m + n + 3]$ adalah pelabelan sisi $f_4 : E(K_{1,m} \cup K_{1,n})$, yaitu

$$\begin{aligned} \Pi(\mathcal{A}) - c + m + n + 3 &= \{e_i|1 \leq i \leq k + 1\}, \\ &= \begin{cases} \frac{3k}{2} + \frac{9-i}{2}, & \text{jika } i \text{ ganjil}, \ 1 \leq i \leq k + 1, \\ 2k + \frac{10-i}{2}, & \text{jika } i \text{ genap}, \ 2 \leq i \leq k, \end{cases} \end{aligned}$$

di mana label-label sisi untuk graf $K_{1,m}$ dan graf $K_{1,n}$ diperoleh dengan menyesuaikan urutan dari himpunan bobot sisi terhadap f_3 sedemikian sehingga diperoleh suatu himpunan terurut dari pelabelan sisi f_4 sebagai berikut.

$$f_4 : E(K_{1,m} \cup K_{1,n}) \to \{(m+n+3), (m+n+4), (m+n+5), \cdots, (2m+2n+2)\}.$$

Jelas bahwa $\mathcal{A}+[\Pi(\mathcal{A})-c+m+n+3]$ merupakan himpunan bobot sisi $W^1_{f_4} \cup W^2_{f_4}$ dari graf $K_{1,m} \cup K_{1,n}$ sedemikian sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} W^1_{f_4} \cup W^2_{f_4} &= \mathcal{A} + [\Pi(\mathcal{A}) - c + m + n + 3], \\ &= [\mathcal{A} + \Pi(\mathcal{A})] - c + m + n + 3, \\ &= \left\{ \frac{3m+3n+2t+13}{2}, \frac{3m+3n+2t+13}{2} + 1, \frac{3m+3n+2t+13}{2} + 2, \cdots, \right. \\ &\quad \left. \frac{5m+5n+2t+11}{2} - 1, \frac{5m+5n+2t+11}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa himpunan tersebut merupakan barisan aritmatika dengan suku awal $\frac{3m+3n+2t+13}{2}$ dan suku akhir $\frac{5m+5n+2t+11}{2}$, serta $d = 1$. Karena himpunan titik telah dilabeli dengan $\{1, 2, 3, \cdots, p\}$, maka dapat disimpulkan bahwa f_4 adalah pelabelan total $(\frac{2m+3n+3t+13}{2}, 1)$-sisi antiajaib super. □

3. Kesimpulan

Pada tulisan ini, telah dikaji kembali bahwa graf $K_{1,m} \cup K_{1,n}$ mempunyai pelabelan total $(m+n+t+7, 2)$-sisi antiajaib super, untuk $m \geq n \geq 2$ dan m adalah kelipatan dari $(n+1)$. Selanjutnya juga telah dikaji kembali bahwa graf $K_{1,m} \cup K_{1,n}$ mempunyai pelabelan total pelabelan total $(\frac{2m+3n+3t+13}{2}, 1)$-sisi antiajaib super, untuk $m+n$ adalah ganjil, $m \geq n \geq 2$ dan m adalah kelipatan dari $(n+1)$.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Budi Rudianto, M.Si dan Ibu Hazmira Yozza, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Chartrand, G. and L. Lesniak. 1996. *Graphs and Digraphs. Third edition.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton-Florida

[2] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Baca. 2008. Antimagic labeling of the union of two stars. *Australasian Journal of Combinatorics.* **42** : 35-44

[3] Ivanco, J. and I. Luckanicova. 2002. On edge-magic disconnected graphs. *SUT Journal of Math.* **38** : 175-184

[4] Sugeng. K. A., M. Miller and M. Baca. 2005. (a,d)-Edge-Antimagic Total Labelings of Caterpillars. *Lecture Notes in Computer Science.* **3330** : 169-180