Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **1** Hal. 49 – 55
Edisi Mei 2019
ISSN : 2303–291X

SIFAT-SIFAT GRUP *SOLVABLE*

DWI RATNA DIAN SARI, YANITA, MONIKA RIANTI HELMI
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : dwiratnadiansari23@gmail.com

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Grup *solvable* merupakan suatu grup yang mempunyai barisan subgrup normal dan grup faktor yang terjadi pada unsur dibarisan tersebut adalah grup *abelian*. Tulisan ini akan membahas sifat-sifat grup *solvable* yaitu jika suatu grup yang sol-vable, maka subgrup dan grup faktor tersebut juga *solvable*. Jika suatu subgrup dan grup faktor yang *solvable*, maka grup tersebut juga *solvable*.

Kata Kunci: Grup, Gubgrup, Gubgrup normal, Grup Faktor, Grup *Solvable*

1. Pendahuluan

Dalam teori aljabar abstrak dikenal adanya teori tentang grup, dimana grup merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma, seperti bersifat tertutup, bersifat asosiatif, memiliki unsur identitas dan memiliki unsur invers(balikan). Sedangkan, subgrup merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari grup dengan operasi biner yang sama dengan grup tersebut.

Sifat grup *solvable* memerlukan definisi subgrup normal dimana subgrup normal merupakan subgrup N dari G yang memenuhi sifat bahwa untuk setiap $n \in N$ dan $g \in G$, maka berlaku $gNg^{-1} \in N$. Sifat ini dapat juga dijelaskan dengan menggunakan koset dari N di G, yaitu N merupakan subgrup normal jika koset kiri dari N di G sama dengan koset kanan N di G (atau $aN = Na, \forall a \in G$).

2. Landasan Teori

2.1. *Grup dan Subgrup*

Definisi 2.1. *[5] Suatu himpunan tidak kosong G dikatakan suatu grup jika pada G dapat didefinisikan suatu operasi biner, ditulis * sedemikian sehingga:*

(1) $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$. (Sifat Tertutup).
(2) Jika $a, b, c \in G$ maka $a * (b * c) = (a * b) * c$. (Sifat Asosiatif).
(3) Terdapat suatu unsur $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk semua $a \in G$ (e dikatakan identitas atau suatu unsur di G).

(4) Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu unsur $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$. (Dapat ditulis unsur b menjadi a^{-1} disebut invers dari a di G).

Definisi 2.2. *[5] Suatu grup G dikatakan abelian jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$.*

Definisi 2.3. *[5] Suatu himpunan bagian tak kosong H dari suatu grup G dikatakan subgrup dari G, jika dengan operasi biner yang sama dengan G maka H juga membentuk grup.*

Lema 2.4. *[1] Suatu himpunan bagian tak kosong H dari suatu grup G dikatakan subgrup dari G, jika dan hanya jika:*

(1) Untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $ab \in H$.
(2) Untuk setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

2.2. *Koset*

Definisi 2.5. *[2] Misalkan G suatu grup dan H suatu subgrup dari G, maka untuk setiap $a \in G$:*

$$Ha = \{\ ha | h \in H\ \} \text{ dan } aH = \{\ ah | h \in H\ \}$$

adalah koset kanan dari H oleh a dan koset kiri dari H oleh a.

Lema 2.6. *[2] Misalkan H subgrup dari G, maka :*

(1) $Ha = Hb \Longleftrightarrow ab^{-1} \in H$.
(2) $aH = bH \Longleftrightarrow b^{-1}a \in H$.

2.3. *Subgrup Normal*

Definisi 2.7. *[1] Suatu subgrup N dari G dikatakan subgrup normal dari G jika untuk setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku $gng^{-1} \in N$.*

Lema 2.8. *[1] Suatu subgrup N adalah subgrup normal dari G jika dan hanya jika $gNg^{-1} = N$ untuk setiap $g \in G$.*

Lema 2.9. *[1] Subgrup N dari G adalah subgrup normal dari G jika dan hanya jika setiap koset kiri dari N di G adalah koset kanan dari N di G.*

Berdasarkan soal 36 pada [5] diperoleh jika H subgrup dari G dan K subgrup normal dari G maka $H \cap K$ subgrup normal dari H.

2.4. *Grup Faktor*

Teorema 2.10. *[1] Misalkan H subgrup dari grup G, maka perkalian koset kiri terdefinisi dengan baik dengan persamaan*

$$(aH)(bH) = (ab)H$$

jika dan hanya jika koset kiri dan koset kanan sama, sedemikian sehingga $aH = Ha$ *untuk semua* $a \in G$.

Akibat 2.11. *[3] Misalkan* H *subgrup dari* G *dengan koset kiri dari* H *sama dengan koset kanan dari* H*, maka koset* $-$ *koset dari* H *membentuk grup* $G/H = \{aH|a \in G\}$ *terhadap grup dengan operasi biner* $(aH)(bH) = (ab)H$.

Definisi 2.12. *[3] Suatu grup* G/H *pada Akibat 2.11 adalah grup faktor dari* G *modulo* H.

2.5. *Isomorfisma*

Definisi 2.13. *[5] Misalkan* $G, G^{'}$ *suatu grup, maka pemetaan* $\varphi : G \to G^{'}$ *dikatakan homomorfisma jika* $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ *untuk semua* $a, b \in G$.

Definisi 2.14. *[5] Image dari* φ, $\varphi(G)$, *yaitu* $\varphi(G) = \{\varphi(a)|a \in G\}$.

Definisi 2.15. *[5] Jika* φ *adalah homomorfisma dari* G *ke* $G^{'}$*, maka kernel dari* φ, $Kernel\ \varphi$*, didefinisikan dengan* $Ker(\varphi) = \{a \in G|\varphi(a) = e^{'}\}$.

Definisi 2.16. *[3] Suatu homomorfisma* $\varphi : G \to G^{'}$ *satu-satu disebut monomorfisma jika dan hanya jika* $Ker(\varphi) = \{e\}$.

Definisi 2.17. *[3] Suatu homomorfisma dari* G *pada* $G^{'}$ *disebut epimorfisma jika dan hanya jika* $\varphi[G] = G^{'}$.

Definisi 2.18. *[2] Suatu homomorfisma* $\varphi : G \to G^{'}$ *disebut isomorfisma jika* φ *monomorfisma dan* φ *epimorfisma.*

Lema 2.19. *[1] Jika* φ *adalah homomorfisma dari* G *ke* $G^{'}$ *dengan kernel* K*, maka* K *adalah subgrup normal dari* G.

Teorema 2.20. ***(Teorema Pertama Isomorfisma)*** *[5] Misalkan* φ *suatu homomorfisma dari* G *pada* $G^{'}$ *dengan kernel* K*, maka* $G^{'} \cong G/K$*, isomorfisma dengan mengakibatkan pemetaan* $\psi : G/K \to G^{'}$*, didefinisikan dengan* $\psi(Ka) = \varphi(a)$.

Teorema 2.21. ***(Teorema Kedua Isomorfisma)*** *[5] Misalkan* H *subgrup dari* G *dan* N *subgrup normal dari* G*, maka* $HN = \{hn|h \in H, n \in N\}$ *adalah subgrup dari* G, $H \cap N$ *adalah subgrup normal dari* H, $H/(H \cap N) \cong (HN)/N$.

Teorema 2.22. ***(Teorema Ketiga Isomorfisma)*** *[5] Misalkan* $\varphi : G \to G^{'}$ *suatu homomorfisma dengan* $Ker(\varphi) = K$*, dan misalkan* $N^{'}$ *subgrup normal dari* $G^{'}$*, dimana* $N = \{a \in G|\varphi(a) \in N^{'}\}$*, maka* $G/N \cong G^{'}/N^{'}$*. Secara ekivalen,* $G/N \cong (G/K)/(N/K)$.

3. Pembahasan

3.1. *Sifat Grup Solvable*

Definisi 3.1. *[4] Suatu grup* G *dikatakan grup solvable jika* G *mempunyai barisan subgrup yaitu:*

$$\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_k = G,$$

dimana, untuk setiap $0 \leq i < k$, H_i adalah subgrup normal dari H_{i+1} dan grup faktor H_{i+1}/H_i adalah grup abelian.

Teorema 3.2. *[2] Jika G solvable, dan H subgrup dari G, maka H solvable.*

Bukti. Diketahui G *solvable* dan H subgrup dari G, maka G mempunyai barisan subgrup, yaitu:

$$\{e\} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n = G,$$

dimana, untuk setiap $0 \leq i < n$, K_i adalah subgrup normal dari K_{i+1} dan grup faktor K_{i+1}/K_i adalah grup *abelian*. Akan ditunjukkan H *solvable*, dengan membentuk suatu barisan $K_i \cap H$ dari H, yaitu:

$$\{e\} = K_0 \cap H \subset K_1 \cap H \subset K_2 \cap H \subset \cdots \subset K_n \cap H = H,$$

dimana, untuk setiap $0 \leq i < n$, $K_i \cap H$ subgrup normal dari $K_{i+1} \cap H$, berdasarkan soal 36 pada [5]. Selanjutnya, bentuk grup faktor $(K_{i+1} \cap H)/(K_i \cap H)$ adalah grup *abelian*, sehingga barisan subgrup normal terhadap H, yaitu:

$$\{e\} = K_0 \cap H \subset K_1 \cap H \subset K_2 \cap H \subset \cdots \subset K_n \cap H = H,$$

dimana, untuk setiap $0 \leq i < n$, $K_i \cap H$ adalah subgrup normal dari $K_{i+1} \cap H$ dan grup faktor $(K_{i+1} \cap H)/(K_i \cap H)$ adalah grup *abelian*. Dengan demikian barisan subgrup H *solvable*. □

Teorema 3.3. *[4] Misalkan G solvable maka G/N solvable.*

Bukti. Diketahui G *solvable*, dimana barisan subgrup dari G, yaitu:

$$\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_k = G,$$

dimana, untuk setiap $0 \leq i < k$, H_i adalah subgrup normal dari H_{i+1} dan grup faktor H_{i+1}/H_i adalah grup *abelian*. Akan ditunjukkan G/N *solvable* berarti terdapat suatu barisan dari G/N yang memenuhi definisi *solvable* dengan membentuk barisan H_iN/N dan menunjukkan barisan H_iN/N untuk setiap $0 \leq i < k$ memenuhi definisi *solvable*, yaitu dengan menunjukkan:

(1) Akan ditunjukkan H_iN/N subgrup normal dari $H_{i+1}N/N$.

(a)(i) $H_iN \subseteq H_{i+1}N$.
(ii) $H_iN \neq \emptyset$.
(iii) Untuk setiap $a, b \in H_iN$ berlaku $ab \in H_iN$.
(iv) Untuk setiap $a \in H_iN$ berlaku $a^{-1} \in H_iN$.
(b)(i) $H_iN/N \subseteq H_{i+1}N/N$.
(i) $H_iN/N \neq \emptyset$.
(i) Untuk setiap $a, b \in H_iN/N$ berlaku $ab \in H_iN/N$.
(i) Untuk setiap $a \in H_iN/N$ berlaku $a^{-1} \in H_iN/N$.

(c) Akan ditunjukkan H_iN subgrup normal dari $H_{i+1}N$. Ambil sebarang $g \in H_{i+1}N$ dan $x \in H_iN$ dimana $x = h_1n_1$ untuk suatu $h_1 \in H_i$ dan $n_1 \in N$ maka berlaku $gag^{-1} \in H_iN$. Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} gag^{-1} &= gh_1n_1g^{-1}, \ (G \text{ solvable maka } H_i \text{ subgrup normal dari } H_{i+1}), \\ &= gh_1en_1g^{-1}, \\ &= gh_1g^{-1}gn_1g^{-1}, \ (g \in H_{i+1}N \text{ dan } H_{i+1} \text{ dan } N \text{ normal}), \\ &= h_2n_2, \ (h_2n_2 \in H_iN). \end{aligned}$$

Dengan demikian H_iN subgrup normal dari $H_{i+1}N$.

(d) Akan ditunjukkan H_iN/N subgrup normal dari $H_{i+1}N/N$. Ambil sebarang $g \in H_{i+1}N/N$ dan $a \in H_iN/N$ dimana $a = xN$ maka berlaku $gag^{-1} \in H_iN/N$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} gag^{-1} &= gxNg^{-1}, \\ &= gxg^{-1}N, \\ &= yN, \ (y \in H_iN). \end{aligned}$$

Dengan demikian H_iN/N subgrup normal dari $H_{i+1}N/N$. Oleh karena, H_i dan N subgrup normal maka diperoleh H_iN/N terdapat barisan subgrup dari H_iN/N pada G/N, yaitu:

$$\{e\} = H_0N/N \subset H_1N/N \subset H_2N/N \subset \cdots \subset H_kN/N = G/N,$$

dimana, untuk setiap $0 \leq i < k$, H_iN/N adalah subgrup normal dari $H_{i+1}N/N$.

(2) Akan ditunjukkan grup faktor $(H_{i+1}N/N)/(H_iN/N)$ adalah grup *abelian*. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} H_iN &= \{an_1 | a \in H_i, n_1 \in N\}, \\ H_{i+1}N &= \{bn_2 | b \in H_{i+1}, n_2 \in N\}, \\ H_{i+1}N/H_iN &= \{an_1H_iN | an_1 \in H_{i+1}N\}, \\ &= \{aH_in_1N | a \in H_{i+1}, n_1 \in N\}, \\ &= \{aH_iN | a \in H_{i+1}\}. \end{aligned}$$

Misal $s, t \in H_{i+1}N/N$ dimana $s = aH_iN$ dan $t = bH_iN$, sehingga :

$$\begin{aligned} st &= aH_iNbH_iN, \\ &= NaH_ibH_iN, \\ &= NbH_iaH_iN, \\ &= bH_iNaH_iN, \\ &= ts. \end{aligned}$$

Oleh karena $st = ts$ maka $H_{i+1}N/H_iN$ adalah grup abelian, sehingga berdasarkan Teorema 2.21 $(H_{i+1}N/N)/(H_iN/N) \cong H_{i+1}N/H_iN$ adalah juga grup abelian. Dengan demikian barisan subgrup G/N *solvable*. □

Teorema 3.4. *[4] Misalkan N subgrup normal dari G. Jika N dan G/N solvable maka G solvable.*

Bukti. Diketahui N *solvable* dimana barisan subgrup dari N, yaitu:

$$\{e\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_t = N,$$

dimana, untuk setiap $0 \leq i < t$, N_i adalah subgrup normal dari N_{i+1} dan grup faktor N_{i+1}/N_i adalah grup *abelian*. Selanjutnya, diketahui G/N *solvable* dimana barisan subgrup dari G/N, yaitu:

$$\{N\} = H_0/N \subset H_1/N \subset H_2/N \subset \cdots \subset H_s/N = G/N,$$

dimana, untuk setiap $0 \leq j < s$, H_j/N adalah subgrup normal dari H_{j+1}/N dan grup faktor $(H_{j+1}/N)/(H_j/N)$ adalah grup *abelian*, sehingga dapat dibentuk barisan subgrup dari G, yaitu:

$$\{e\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_t = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_s = G.$$

dimana, untuk setiap $0 \leq i < t$, N_i adalah subgrup normal dari N_{i+1} dan grup faktor N_{i+1}/N_i adalah grup *abelian*. Selanjutnya, untuk setiap $0 \leq j < s$, H_j adalah subgrup normal dari H_{j+1} dan grup faktor $(H_{j+1}/N)/(H_j/N) \cong (H_{j+1})/(H_j)$ sehingga $(H_{j+1})/(H_j)$ adalah grup *abelian* berdasarkan Teorema 2.21. Dengan demikian barisan subgrup G *solvable* □

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan tentang beberapa sifat yang berkaitan dengan grup *solvable*, dimana grup *solvable* merupakan suatu grup yang mempunyai barisan subgrup normal dan setiap grup faktor yang terjadi pada unsur dibarisan adalah grup *abelian*, maka:

(1) Jika suatu grup yang *solvable* maka subgrup dan grup faktor tersebut juga *solvable*.
(2) Jika suatu subgrup dan grup faktor yang *solvable*, maka grup tersebut juga *solvable*.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Efendi, M.Si, Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Herstein, I. N. 1975. *Topics In Algebra*, Second Edition. New York
[2] Ehrlich, Gertrude. 1991. *Fundamental Concepts of Abstract Algebra*. PWS − KENT Publishing Company, United States of America
[3] Fraleigh, John B and Katz, Victor. 1994. *A First Course In Abstract Algebra*, Fifth Edition. Addison − Wesley Publishing Company, United States of America

[4] Gallian, Joseph A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra, Seventh Edition.* Brooks/Cole, Cengage Learning, United States of America

[5] Herstein, I. N. 1996. *Abstract Algebra, Third Edition.* Prentice-Hall, Inc, New Jersey