PELABELAN TOTAL (a, d) -SISI ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF RODA W_n

HERU PERMANA

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 heru.1787@yahoo.com*

Abstrak. Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$. Suatu pemetaan bijeksi g dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dikatakan *pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib* di G , jika himpunan bobot sisi $W(xy) = \{w(xy) \mid w(xy) = g(x) + g(y) + g(xy), \forall xy \in E(G)\}$, dapat dinyatakan sebagai barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d . Pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib dikatakan *pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super* jika $g(V(G)) = \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$. Pada makalah ini akan dikaji kembali tentang pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib pada graf roda W_n dengan $n + 1$ titik.

Kata Kunci: Pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib, graf roda.

1. Pendahuluan

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Banyak persoalan akan lebih jelas untuk diterangkan bila dapat direpresentasikan dalam bentuk graf. Suatu pelabelan terhadap graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan bijektif dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan asli. Apabila daerah asal dari pemetaan hanya himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Apabila daerah asalnya hanya himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi. Apabila daerah asal merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total.

Misal terdapat $G = (V, E)$ dengan $|V| = p$ dan $|E| = q$. Notasi $|V|$ berarti banyaknya titik pada G , sementara $|E|$ mengatakan banyaknya sisi pada G . Suatu fungsi bijeksi $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ dikatakan pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib pada graf G jika himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G yang dinotasikan dengan $W = \{w(xy) \mid w(xy) = f(x) + f(xy) + f(y), xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

2. Pelabelan Total (a, d) -Sisi Antiajaib pada Graf Roda W_n

Dalam makalah ini penulis melakukan kajian kembali terhadap [1], yang membahas tentang pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super pada graf roda W_n , $n \geq 3$. Graf roda W_n berasal dari graf siklus C_n dengan cara menghubungkan satu titik di luar C_n , namakan x , ke semua titik yang ada di C_n .

Teorema 2.1. [1] *Jika graf Roda $W_n, n \geq 3$ adalah graf dengan pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super maka $d < 2$.*

Bukti. Misalkan graf $W_n, n \geq 3$ mempunyai pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super $f : V(W_n) \cup E(W_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n+1\}$. Maka himpunan bobot sisi dari W_n dapat ditulis sebagai berikut.

$$W = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (2n - 1)d\}.$$

Bobot sisi maksimum adalah $5n + 2$. Bobot ini diperoleh apabila kedua titik dilabeli dengan label titik terbesar, yaitu n dan $n + 1$, serta sisi terkait juga dilabeli dengan label sisi terbesar, yaitu $3n + 1$. Sedangkan bobot sisi minimum adalah $n + 5$. Bobot ini diperoleh apabila kedua titik dilabeli dengan label titik terkecil, yaitu 1 dan 2, serta sisi terkait juga dilabeli dengan label sisi terkecil, yaitu $n + 2$.

Karena nilai bobot sisi tidak akan kurang dari $n + 5$ dan tidak akan lebih dari $5n + 2$, maka

$$n + 5 \leq a \tag{2.1}$$

$$a + (2n - 1)d \leq 5n + 2 \tag{2.2}$$

Dari pertaksamaan (2.1) dan pertaksamaan (2.2), diperoleh :

$$\begin{aligned} (n + 5) + (2n - 1)d &\leq a + (2n - 1)d \leq 5n + 2 \\ (n + 5) + (2n - 1)d &\leq 5n + 2 \\ (2n - 1)d &\leq 5n + 2 - (n + 5) \\ d &\leq \frac{4n - 3}{2n - 1} \end{aligned}$$

Karena $n \geq 3$, maka haruslah $d < 2$. □

Karena $d < 2$, maka haruslah $d \in \{0, 1\}$. Pada [2] telah ditunjukkan bahwa untuk $d = 0$, graf roda W_n tidak mempunyai pelabelan $(a, 0)$ sisi antiajaib super. Karena itu, pada teorema berikut cukup dilihat pelabelan total (a, d) sisi antiajaib super pada graf roda W_n dengan $d = 1$.

Teorema 2.2. [1] *Graf Roda W_n mempunyai pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super jika dan hanya jika $d = 1$ dan $n \not\equiv 1 \pmod{4}$.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Misalkan W_n mempunyai pelabelan super (a, d) -antiajaib total. Akan dibuktikan $d = 1$ dan $n \not\equiv 1 \pmod{4}$.

Misalkan $h : V(W_n) \cup E(W_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n + 1\}$ adalah pelabelan total $(a, 1)$ -sisi antiajaib super pada W_n . Dalam penjumlahan dari bobot-bobot sisi, label pusat digunakan n kali, label titik $x_i, 1 \leq i \leq n$ digunakan tiga kali, dan label sisi lainnya

digunakan satu kali. Maka diperoleh jumlah bobot sisi W_n sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 3 \sum_{i=3}^n h(x_i) + nh(c) + \sum_{e \in E(W_n)} h(e) &= 3(1 + \cdots + n + 1) + (n - 3)h(c) + (n + 2 + \cdots + 3n + 1) \\
 &= 3((n + 2)\left(\frac{n + 1}{2}\right) + (n - 3)h(c) + \frac{2n}{2}n + 2 + 3n + 1) \\
 &= \frac{3}{2}(n + 2)(n + 1) + n(4n + 3) + (n - 3)h(c). \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

Karena bobot sisi dapat ditulis sebagai $W = \{a, a + d, \dots, a + (2n - 1)d\}$, maka jumlah bobot sisi untuk semua sisi di W_n adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in E(W_n)} W(e) &= \{a, a + d, \dots, a(2n - 1)d\} \\
 &= \frac{2n}{2}(a + (a + (2n - 1)d)) \\
 &= n(2a + (2n - 1)d). \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (2.3) dan (2.4) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2}(n + 2)(n + 1) + n(4n + 3) + (n - 3)h(c) &= 2na + (2n^2 - n)d, \\
 3(n^2 + 3n + 2) + 8n^2 + 6n + 2(n - 3)h(c) &= 4an + 2n(2n - 1)d, \\
 4an &= 3(n^2 + 3n + 2) + 8n^2 + 6n + 2(n - 3)h(c), \\
 &\quad - 2n(2n - 1)d,
 \end{aligned}$$

Karena $d = 1$, maka :

$$a = \frac{7n^2 + 17n + 6 + 2(n - 3)h(c)}{4n}.$$

Untuk $n \equiv 1 \pmod{4}$, dapat dilihat bahwa nilai a bukan merupakan bilangan bulat. Maka haruslah $n \not\equiv 1 \pmod{4}$. Sehingga telah ditunjukkan bahwa jika W_n adalah graf dengan pelabelan total (a, d) sisi antiajaib, maka $d = 1$ dan $n \not\equiv 1 \pmod{4}$.

($\Leftarrow$) Selanjutnya misalkan $d = 1$ dan $n \not\equiv 1 \pmod{4}$. Akan ditunjukkan bahwa W_n adalah graf dengan pelabelan total $(a, 1)$ -sisi antiajaib super.

Jika $n \equiv 0 \pmod{4}$, maka konstruksikan pelabelan h_1 berikut.

$$\begin{aligned}
 h_1(c) &= \frac{n + 2}{2}, \\
 h_1(x_i) &= \begin{cases} \frac{i + 1}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan ganjil} \\ \frac{n + 2 + i}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan genap} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1(cx_i) &= \begin{cases} \frac{3n}{2} + 3 - \frac{i+3}{4}, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{7n}{4} + 3 - \frac{i+2}{4}, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{4} \\ 2n + 3 - \frac{i+1}{4}, & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{5n}{4} + 2 - \frac{i}{4}, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{4} \end{cases} \\
h_1(x_n x_1) &= \frac{5n}{4} + 2, \\
h_1(x_i x_{i+1}) &= \begin{cases} \frac{5n}{2} + 3 - \frac{i+1}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan ganjil} \\ 3n + 2 - \frac{i}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan genap, } i < n \end{cases}
\end{aligned}$$

Jika $n \equiv 2 \pmod{4}$, definisikan fungsi h_2 dari W_n sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
h_2(c) &= \frac{n+2}{2}, \\
h_2(x_i) &= \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan ganjil} \\ \frac{n+2+i}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan genap} \end{cases} \\
h_2(x_i x_{i+1}) &= \begin{cases} \frac{5n}{2} + 3 - \frac{i+1}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan ganjil} \\ 3n + 2 - \frac{i}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan genap, } i < n \end{cases} \\
h_2(x_n x_1) &= \frac{7n+10}{4}, \\
h_2(cx_i) &= \begin{cases} \frac{3n}{2} + 3 - \frac{i+3}{4}, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{5n+2}{4} + 2 - \frac{i+2}{4}, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{4} \\ 2n + 3 - \frac{i+1}{4}, & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{7n+2}{4} + 2 - \frac{i}{4}, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Jika $n \equiv 3 \pmod{4}$, definisikan fungsi h_3 sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
h_3(c) &= 1, \\
h_3(x_i) &= \begin{cases} \frac{i+3}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan ganjil} \\ \frac{n+3+i}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan genap} \end{cases} \\
h_3(cx_i) &= \begin{cases} \frac{7n+11}{4} - \frac{i+3}{4}, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{11(n+1)}{4} + 2 - \frac{i+2}{4}, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{5(n+1)}{2} - \frac{i+1}{4}, & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{4} \\ 3n + 2 - \frac{i}{4}, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{4} \end{cases} \\
h_3(x_n x_1) &= \frac{3(n+1)}{2},
\end{aligned}$$

$$h_3(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} \frac{9(n+1)}{4} - \frac{i+1}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan ganjil, } i < n \\ \frac{3(n+1)}{2} - \frac{i}{2}, & \text{jika } i \text{ bilangan genap} \end{cases}$$

Dapat ditunjukkan bahwa pelabelan $h_i, i \in \{1, 2, 3\}$, menggunakan bilangan bulat dari himpunan $h_i(V(W_n)) \cup h_i(E(W_n)) = \{1, 2, \dots, n+1\} \cup \{n+2, n+3, \dots, 4n+3\}$ tepat satu kali.

Dengan perhitungan langsung kita dapat menyimpulkan bahwa himpunan dari bobot sisi $W_{h_1} = \{2n+4, 2n+5, \dots, 4n+3\}$, $W_{h_2} = \{2n+4, 2n+5, \dots, 4n+3\}$ dan $W_{h_3} = \{7(n+1)/4+3, 7(n+1)/4+4, \dots, 15(n+1)/4\}$ memuat bilangan bulat yang terurut.

Karena pada ketiga pelabelan h_1, h_2 , dan h_3 , himpunan bobot sisi merupakan barisan terurut dengan suku awal a dan beda 1, maka ketiga pelabelan tersebut adalah pelabelan total $(a, 1)$ -sisi antiajaib, untuk nilai a yang bersesuaian. Selanjutnya, karena pada ketiga pelabelan tersebut, himpunan label terkecil diberikan kepada himpunan titik graf Roda, maka pelabelan h_1, h_2 , dan h_3 adalah pelabelan super. $\square$

3. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah ditunjukkan kembali bahwa jika graf roda $W_n, n \geq 3$ adalah graf dengan pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super maka haruslah $d < 2$. Selanjutnya juga ditunjukkan kembali bahwa graf roda W_n mempunyai pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super untuk $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ dan $d = 1$.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Budi Rudianto, M.Si, Bapak Narwen, M.Si, Dr. Admi Nazra dan Bapak Zulakmal, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Baca. M, Y.Lin, M.Miler, M.Z. Yousief. Edge-antimagic graph. *Discrete Mathematics*. **307** (2007) : 1232 – 1244.
- [2] H. Enomoto, A.S. Llado, T. Nakamigawa, G. Ringel. *Super edge-magic*. SUT J. Math, **34** (1998) : 105 – 109
- [3] R.M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima, F.A. Muntaner-Batle. *The Place of super edge-magic labelings among other classes of labelings*, *Discrete Math*. **231** (2001): 153 – 168.
- [4] D.B West. **An Introduction to Graph Theory** Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.