RUANG LEBESGUE $L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$ SEBAGAI RUANG NORM-2 UNTUK $1 \leq p < \infty$

FAJRI OCTARIADY, SHELVI EKARIANI, HARIPAMYU

*Program Studi S1 Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : fajrioctariady@gmail.com*

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Misalkan $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ suatu himpunan tak kosong, $\mathfrak{A}$ adalah suatu sigma aljabar dan μ adalah ukuran pada $[0, 1]$. Misalkan $([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$ adalah ruang ukuran yang memiliki sekurang-kurangnya n subhimpunan yang saling lepas dengan ukuran positif. Tulisan ini bertujuan menunjukkan ruang Lebesgue $L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$, untuk $1 \leq p < \infty$ dapat dilengkapi dengan norm-2 sehingga $L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$ merupakan ruang norm-2.

Kata Kunci: Ukuran, Norm-2

1. Pendahuluan

Misalkan X suatu himpunan tak kosong, $\mathfrak{A}$ adalah suatu sigma aljabar dan μ adalah ukuran pada X . Misalkan $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ adalah ruang ukuran yang memiliki sekurang-kurangnya n subhimpunan yang saling lepas dengan ukuran positif. Ruang $L^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, adalah ruang kelas ekuivalen dari fungsi-fungsi sedemikian sehingga $\int_X |f(x)|^p d\mu(X) < \infty$. Misalkan fungsional $\|f\|_p = [\int_X |f(x)|^p d\mu(X)]^{1/p}$ merupakan suatu norm pada $L^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$, maka ruang $(L^p(X, \mathfrak{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ merupakan ruang bernorm.

Pada tahun 2015, Ekariani dkk [3] mengkaji ruang $L^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$ sebagai ruang norm- n . Pada penelitian ini akan dibahas kasus khusus dari [3] untuk $n = 2$.

2. Landasan Teori

2.1. Teori Ukuran

Definisi 2.1. [8] Misalkan X merupakan suatu himpunan tak kosong dan $\mathcal{P}(X)$ adalah koleksi dari semua subhimpunan pada X . Fungsi $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ disebut ukuran luar pada X jika

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- (ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ jika $A \subseteq B \subseteq X$.

(iii) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^n A_n) \leq \sum_{n=1}^n \mu^*(A_n)$, untuk semua barisan (A_n) dari subhimpunan X .

Definisi 2.2. [8] Misalkan μ^* adalah ukuran luar pada himpunan tak kosong X . Himpunan $A \subseteq X$ disebut terukur pada μ^* , apabila untuk setiap $E \subseteq X$ berlaku

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Definisi 2.3. [8] Misalkan X himpunan tak kosong. Suatu koleksi dari subhimpunan X yang disimbolkan oleh $\mathfrak{A}$ disebut sebuah σ -aljabar dari himpunan X , apabila memenuhi:

- (i) Terdapat sekurang-kurangnya satu $A \subseteq X$ sehingga memenuhi $A \in \mathfrak{A}$,
- (ii) Jika $A \in \mathfrak{A}$, maka $A^c \in \mathfrak{A}$, dimana $A^c = X \setminus A$, dan
- (iii) Jika $A_n \in \mathfrak{A}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.

Pasangan $(X, \mathfrak{A})$ dengan X merupakan himpunan tak kosong dan $\mathfrak{A}$ merupakan sebuah σ -aljabar disebut suatu *ruang terukur*.

Definisi 2.4. [8] Misalkan $(X, \mathfrak{A})$ adalah suatu ruang terukur. Fungsi $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$ disebut ukuran pada $(X, \mathfrak{A})$, apabila

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii) $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$, untuk semua barisan (A_n) dari sejumlah pasang himpunan saling lepas yang termuat pada $\mathfrak{A}$.

Kelompok $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ dengan X merupakan himpunan tak kosong, $\mathfrak{A}$ merupakan σ -aljabar, dan μ adalah ukuran pada ruang terukur $(X, \mathfrak{A})$ disebut *ruang ukuran*.

Definisi 2.5. [7] Misalkan $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ adalah ruang ukuran. Fungsi $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut fungsi terukur, jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku himpunan $E_\alpha(f) = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$ adalah himpunan terukur.

2.2. Integral Lebesgue

Integral adalah suatu metode yang dapat digunakan untuk menghitung luas daerah di bawah kurva, salah satunya adalah integral Lebesgue. Pada integral Lebesgue sering dijumpai integral fungsi sederhana. Misalkan X suatu himpunan tak kosong, fungsi $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut fungsi sederhana jika dan hanya jika range fungsi tersebut hingga atau $\psi(X) = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Definisi 2.6. [8] Misalkan $E \subseteq X$. Fungsi $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in E \\ 0, & \text{jika } x \notin E, \end{cases}$$

disebut fungsi karakteristik dari E .

Definisi 2.7. [8] Suatu fungsi yang terdefinisi pada himpunan tak kosong X adalah fungsi sederhana pada X , jika range fungsi tersebut himpunan hingga di $\mathbb{R}$.

Definisi 2.8. [8] Misalkan $E_1, E_2, \dots, E_m$ adalah subhimpunan tak kosong yang saling lepas, dengan $\bigcup_{j=1}^m E_j = X$, untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. Fungsi $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $\phi := \sum_{j=1}^m \kappa_j \chi_{E_j}$, dengan $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m \in \mathbb{R}$, dimana $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \dots \neq \kappa_m$ disebut representasi kanonik dari fungsi sederhana ϕ .

Definisi 2.9. [4] Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah subhimpunan tak kosong, dengan $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$, untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Misalkan ψ adalah fungsi sederhana pada X . Integral Lebesgue fungsi ψ pada X didefinisikan sebagai berikut

$$\int_X \psi d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(X_i).$$

Proposisi 2.10. [7] Misalkan fungsi φ dan ψ terdefinisi pada ruang ukuran $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Maka untuk setiap α dan β berlaku

- (i) $\int_X (\alpha\varphi + \beta\psi) d\mu = \alpha \int_X \varphi d\mu + \beta \int_X \psi d\mu$.
- (ii) Jika $\varphi \leq \psi$ untuk setiap $\varphi, \psi \in X$, $\int_X \varphi d\mu \leq \int_X \psi d\mu$.

2.3. Ruang Norm-2 dan Ruang Hasil Kali Dalam-2

Definisi 2.11. [2] Suatu himpunan X disebut ruang vektor linier atas lapangan F , dengan operasi biner '+' dan perkalian skalar '.', apabila memenuhi, untuk setiap $f, g, h \in X$ dan $r, s \in F$ berlaku

- (i) $f + g \in X$,
- (ii) Terdapat $\bar{0} \in X$, sedemikian sehingga $\bar{0} + f = f$,
- (iii) $f + g = g + f$,
- (iv) Terdapat $-f \in X$, sedemikian sehingga $f + (-f) = \bar{0}$,
- (v) $f + (g + h) = (f + g) + h$,
- (vi) $r \cdot f \in X$,
- (vii) $1 \cdot f = f$,
- (viii) $r \cdot (f + g) = r \cdot f + r \cdot g$,
- (ix) $(r + s) \cdot f = r \cdot f + s \cdot f$, dan
- (x) $(rs) \cdot f = r \cdot (sf)$.

Dengan perkalian skalar $r \cdot f$ disingkat menjadi rf untuk setiap $r \in F$ dan $f \in X$.

Definisi 2.12. [6] Misalkan X adalah suatu ruang vektor linier dengan dimensi $d \geq 2$. Fungsi $\|\cdot, \cdot\| : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut norm-2 pada X , apabila $f, g, h \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi syarat :

- (i) $\|f, h\| \geq 0$ dan $\|f, h\| = 0$ jika dan hanya jika f dan h bergantung linier,
- (ii) $\|f, h\| = \|h, f\|$,
- (iii) $\|\alpha f, h\| = |\alpha| \|f, h\|$, dan
- (iv) $\|f + h, g\| \leq \|f, g\| + \|h, g\|$.

Pasangan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ dengan X merupakan ruang vektor linier dan $\|\cdot, \cdot\|$ merupakan norm-2 pada X disebut ruang norm-2.

2.4. Ruang $L^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Untuk selanjutnya, misalkan $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ adalah ruang ukuran, dan notasi $|f(x)|$ disingkat menjadi $|f|$.

Definisi 2.13. [8] Misalkan $1 \leq p < +\infty$, ruang $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ adalah himpunan dari semua fungsi-fungsi terukur $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, dengan

$$\int_X |f|^p d\mu < +\infty.$$

Dari Definisi ruang $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ adalah himpunan dari semua fungsi-fungsi yang teintegralkan pada X terhadap ukuran μ .

Definisi 2.14. [8] Misalkan $1 \leq p < +\infty$. Bilangan q disebut konjugat dari p yang didefinisikan sebagai berikut.

$$q = \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & \text{jika } 1 < p < +\infty, \\ +\infty, & \text{jika } p = 1. \end{cases}$$

Definisi 2.15. [8] Relasi $\sim$ pada $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ didefinisikan sebagai berikut : $f_1 \sim f_2$ apabila $f_1 = f_2$ a.e pada X atau dengan kata lain $\mu(\{x \in X | f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0$.

Proposisi 2.16. [8] Relasi $\sim$ pada $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ adalah relasi ekuivalen.

Dari Proposisi 2.16 diatas, relasi ekuivalen $\sim$ mendefinisikan kelas-kelas ekuivalen. Kelas ekuivalen $[f]$ dari $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ adalah himpunan semua $f' \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ yang ekuivalen dengan f atau $[f] = \{f' \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu) | f' \sim f\}$.

Proposisi 2.17. [8] Misalkan $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Maka

- (i) $[f_1] = [f_2]$ jika dan hanya jika $f_1 \sim f_2$ a.e. pada X .
- (ii) Jika $[f_1] \cap [f_2] \neq \emptyset$, maka $[f_1] = [f_2]$.

Definisi 2.18. [8] Ruang Lebesgue $L^p(X, \mathfrak{A}, \mu) = \{[f] | f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu)\}$.

Definisi 2.19. [8] Penjumlahan dan perkalian skalar pada $L^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ didefinisikan sebagai berikut. $[f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2]$, $\alpha[f] = [\alpha f]$.

Untuk hal-hal selanjutnya, notasi $[f] \in L^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ disederhanakan menjadi f tanpa mengurangi makna bahwa f adalah koleksi semua fungsi-fungsi yang berelasi dengan f sehingga f bukan fungsi tunggal.

2.5. Dasar Ketaksamaan

Teorema 2.20. [5] (**Ketaksamaan segitiga**) Untuk sebarang segitiga, jumlah dua sisinya haruslah lebih besar daripada sisi ketiganya.

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Lema 2.21. [7] (**Ketaksamaan Young**) Misalkan p, q saling konjugat dan $a, b \geq 0$. Maka berlaku

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 2.22. [4] (**Ketaksamaan Cauchy Schwartz**) Misalkan $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ merupakan ruang hasil kali dalam. Untuk setiap $f, g \in X$ berlaku sifat

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

Teorema 2.23. [5] (**Ketaksamaan Holder**) Misalkan p, q saling konjugat, fungsi f, g adalah fungsi terukur bernilai real pada ruang $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, sedemikian sehingga $|f|^p$ dan $|g|^q$ teintegral, maka fg terintegralkan dan

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema 2.24. [5] (**Ketaksamaan Minkowski**) Misalkan f, g adalah fungsi terukur bernilai riil pada ruang $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $|f|^p$ dan $|g|^p$ teintegral, untuk $p \in [1, \infty)$. Maka $|f + g|^p$ teintegral dan

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

3. Pembahasan

Pada bab ini akan dibahas $L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$, untuk $1 \leq p < \infty$ merupakan ruang norm-2, dengan $\mathfrak{A}$ merupakan sigma aljabar, dan μ terukur pada ruang terukur $([0, 1], \mathfrak{A})$. Selanjutnya, penelitian ini juga memverifikasi ruang norm-2 ($L^p([0, 1], \|\cdot, \cdot\|)$) merupakan ruang hasil kali dalam-2, apabila memenuhi hukum paralelogram untuk ruang norm-2. Pada penelitian ini definisikan $\mathfrak{A} = \{\emptyset, [0, 1]\}$ dan $\mu : I \rightarrow [0, \infty]$ merupakan fungsi panjang interval.

3.1. Ruang Vektor Linier $L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$, untuk $1 \leq p < \infty$

Pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa $L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$, untuk $1 \leq p < \infty$ adalah ruang vektor linier. Sebelum menunjukkan $L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$, untuk $1 \leq p < \infty$ adalah ruang vektor linier, akan ditunjukkan terlebih dahulu ruang $([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$ adalah ruang ukuran.

Ruang $([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$ disebut ruang ukuran, apabila interval $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ merupakan himpunan terukur, $\mathfrak{A}$ merupakan suatu σ aljabar, dan μ ukuran pada ruang terukur $([0, 1], \mathfrak{A})$.

Himpunan $[0, 1]$ dikatakan himpunan terukur apabila memenuhi Definisi 2.2. Ambil $\mathfrak{A} = \{\emptyset, [0, 1]\}$ merupakan suatu σ aljabar sehingga $([0, 1], \mathfrak{A})$ adalah ruang terukur. Akibatnya $([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$ adalah ruang ukuran.

Ruang $L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$ adalah ruang vektor linier apabila memenuhi Definisi 2.11. Sebagai bukti ambil $f, g \in L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$, dengan fungsi $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dan $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dan $(kf)(x) = kf(x)$.

3.2. Ruang Norm-2 ($L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$, $\|\cdot, \cdot\|_p$), untuk $1 \leq p < \infty$

Pada subbab ini akan ditunjukkan ruang vektor linier $L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$, untuk $1 \leq p < \infty$ merupakan ruang norm-2. Fungsi $\|\cdot, \cdot\|_p : L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu) \times L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$,

untuk $1 \leq p < \infty$ didefinisikan sebagai

$$\|f, h\|_p = \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left\| \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_2) \\ h_1(x_1) & h_2(x_2) \end{pmatrix} \right\|^p d\mu_1 d\mu_2 \right)^{1/p} \quad (3.1)$$

Akan ditunjukkan $\|\cdot, \cdot\|_p$ memenuhi sifat (i) s.d. (iv) pada Definisi 2.12 .

Ambil $p \in [1, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$ dan $f, g, h \in L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$ sembarang dengan

$$\begin{aligned} f &= (f_1, f_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \\ g &= (g_1, g_2) = (g_1(x_1), g_2(x_2)) \\ h &= (h_1, h_2) = (h_1(x_1), h_2(x_2)). \end{aligned}$$

Maka Ruang Lebesgue $(L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu), \|\cdot, \cdot\|_p)$, untuk $1 \leq p < \infty$ sebagai ruang norm-2.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa $([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$ merupakan ruang ukuran, $L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$, untuk $1 \leq p < \infty$ adalah ruang vektor linier, dan fungsi $\|\cdot, \cdot\|_p$ pada persamaan (3.1) adalah norm-2 pada $L^p([0, 1], \mathfrak{A}, \mu)$, untuk $1 \leq p < \infty$.

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, bapak Dr. Jenizon dan bapak Zulakmal, M.Si selaku dosen penguji, yang telah memberikan kritik dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] E. Kreyzig, 1978, *Introduction to Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York.
- [2] B. Jacob, 1989, *Linear Algebra*. Wiley and Sons, Inc., New York.
- [3] S. Ekariani, H. Gunawan, J.Lindiarni, 2015, On the n -Normed Space of p -Integrable functions, *Mathematica Aeterna*
- [4] H. L. Royden dan P. M. Fitzpatrick, 2010, *Real Analysis*. 4th. Prentice Hall, New Jersey.
- [5] B. Bela, 1999, *Linear Analysis and an Introductory Course*, Second Edition, Cambridge University, Cambridge.
- [6] S. Konca, M. Idris, H. Gunawan, 2016, A New 2-Inner Product of The Spaces of p -Sumable Sequences. *J. Math ITB*, pp 244 – 249.
- [7] B. Thompson, J. Bruker, A. 2008, *Classic Real Analysis*, 2nd edition. John Wiley and Sons, New York.
- [8] M. Papadimitrakakis, 2004, *Measure Theory*. Crete University, New York.