KEKONVERGENAN BARISAN DI RUANG HILBERT PADA PEMETAAN TIPE-*NONSPREADING* DAN *NONEXPANSIVE*

DEBI OKTIA HARYENI

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 debby_hy@gmail.com*

Abstract. We obtained some fundamental properties for k -strictly pseudononspreading mappings in Hilbert space. Furthermore, we studied the approximation of common fixed points of k -strictly pseudononspreading mappings and nonexpansive mappings in a Hilbert space using the iterative scheme.

Kata Kunci: Fixed point, Hilbert space, Banach Space, nonexpansive mappings, nonspreading mappings.

1. Pendahuluan

Misalkan X adalah suatu himpunan tak kosong dan $T : X \rightarrow X$. Titik $x \in X$ dinamakan suatu titik tetap dari T jika berlaku $T(x) = x$. Himpunan semua titik tetap dari T dinotasikan dengan $F(T)$.

Pada ruang Hilbert dapat didefinisikan beberapa jenis pemetaan, seperti pemetaan *nonexpansive* dan pemetaan *nonspreading*. Titik tetap dari pemetaan tertentu pada ruang Hilbert tidak mudah untuk ditentukan secara langsung. Oleh karena itu, diperlukan prosedur iterasi sehingga titik tetap sesungguhnya dapat dihampiri. Nilai hampiran ini dinamakan aproksimasi titik tetap.

Dalam tulisan ini penulis akan mengkaji kembali paper [5] yang membahas tentang aproksimasi titik tetap dari pemetaan k *pseudononspreading* sejati $S : C \rightarrow C$ dan pemetaan *nonexpansive* $T : C \rightarrow C$ dalam ruang Hilbert dengan menggunakan iterasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 &\in C, \\ x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)(\beta_n x_n + (1 - \beta_n)Sx_n) + \alpha_n(\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Tx_n). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Selanjutnya iterasi di atas akan dipandang sebagai suatu barisan (x_n) di C .

1.1. Norm dan Hasil Kali Dalam

Definisi 1.1. [4] Suatu fungsi $\|\cdot\|$ dari suatu ruang vektor X ke $\mathbb{R}$ dikatakan suatu norm jika memenuhi kondisi berikut:

(N1) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$,

- (N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$,
 (N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y \in X$.

Pasangan $(X, \|\cdot\|)$ dinamakan **ruang norm**.

Definisi 1.2. [4] Misalkan X adalah suatu ruang vektor kompleks. Suatu fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ dinamakan hasil kali dalam di X jika untuk sebarang $x, y, z \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, berlaku:

- (H1) $\langle x, x \rangle > 0$, dan $\langle x, x \rangle = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$,
 (H2) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
 (H3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
 (H4) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (tanda bar menunjukkan konjugat kompleks).

Pasangan $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dinamakan **ruang hasil kali dalam (ruang pre-Hilbert)**.

Definisi 1.3. [4] Suatu barisan dari vektor-vektor (x_n) dalam ruang norm X dikatakan *Cauchy* jika $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0$, yaitu untuk setiap $\epsilon > 0$, ada suatu $M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\|x_m - x_n\| < \epsilon$, untuk setiap $m, n \geq M(\epsilon)$.

Suatu ruang hasil kali dalam lengkap, yakni bilamana memenuhi definisi ruang hasil kali dalam dan setiap barisan *Cauchy* di X konvergen ke suatu elemen di X , dinamakan **ruang Hilbert**, sedangkan ruang bernorm lengkap dinamakan **ruang Banach**.

1.2. Pemetaan *nonexpansive* dan *nonspreading*

Misalkan H adalah suatu ruang Hilbert riil dan C adalah subhimpunan konveks tertutup yang tak kosong dari H . Pemetaan $T : C \rightarrow C$ dikatakan ***nonexpansive*** apabila memenuhi

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in C. \quad (1.2)$$

Pemetaan $T : C \rightarrow C$ dikatakan ***nonspreading*** jika memenuhi

$$2\|Tx - Ty\|^2 \leq \|Tx - y\|^2 + \|x - Ty\|^2, \forall x, y \in C. \quad (1.3)$$

Berdasarkan terminologi Browdwer-Petryshyn [5], $T : C \rightarrow H$ dikatakan ***k pseudononspreading sejati*** jika ada $k \in [0, 1)$, sedemikian sehingga

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + 2\langle x - Tx, y - Ty \rangle + k\|x - Tx - (y - Ty)\|^2, \forall x, y \in C. \quad (1.4)$$

Dengan demikian jelas bahwa setiap pemetaan *nonspreading* merupakan pemetaan *k pseudononspreading* sejati.

Definisi 1.4. [3] Misalkan E adalah suatu ruang Banach riil. Suatu pemetaan T dengan domain $D(T)$ dan range $R(T)$ di E disebut *demiclosed* di suatu titik $p \in D(T)$ jika setiap (x_n) yang merupakan barisan di $D(T)$ konvergen lemah ke suatu titik $x \in D(T)$ dan (Tx_n) konvergen kuat ke p , maka $Tx = p$.

Lema 1.5. [6] Misalkan H suatu ruang Hilbert riil, dengan demikian untuk setiap $x, y, z, w \in H$ berlaku hubungan berikut

- (1) $\|tx + (1-t)y\|^2 = t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 - t(1-t)\|x-y\|^2$, dengan $t \in [0, 1]$,
 (2) $2\langle x-y, z-w \rangle = \|x-w\|^2 + \|y-z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y-w\|^2$.

Lema 1.6. [5] Misalkan C suatu subhimpunan konveks tertutup dari H . Pemetaan $S : C \rightarrow C$ adalah pemetaan k pseudononspreading sejati jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in C$, berlaku

$$2\|Sx - Sy\|^2 \leq \|Sx - y\|^2 + \|x - Sy\|^2 + k\|(1-S)x - (1-S)y\|^2. \quad (1.5)$$

Lema 1.7. [5] Misalkan C adalah suatu subhimpunan konveks tertutup dan tak kosong dari H , $S : C \rightarrow C$ suatu pemetaan k pseudononspreading sejati, dan $A = I - S$, sehingga untuk setiap $x, y \in C$ diperoleh

$$(2-k)\|Ax - Ay\|^2 \leq 2\langle x-y, Ax - Ay \rangle + \|Ax\|^2 + \|Ay\|^2. \quad (1.6)$$

Lema 1.8. [5] Misalkan C subhimpunan konveks tertutup yang tak kosong dari suatu ruang Hilbert H dan $S : C \rightarrow C$ adalah suatu pemetaan k pseudononspreading sejati, maka $I - S$ demiclosed di 0.

2. Kekonvergenan Barisan di Ruang Hilbert pada Pemetaan Tipe-nonspreading dan nonexpansive

2.1. Teorema Utama

Teorema 2.1. [5] Misalkan C adalah subhimpunan konveks tertutup tak kosong dari suatu ruang Hilbert riil H , $S : C \rightarrow C$ adalah suatu pemetaan k pseudononspreading sejati, dan $T : C \rightarrow C$ adalah suatu pemetaan nonexpansive sedemikian sehingga $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$. Misalkan $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ adalah barisan-barisan dalam selang $[0, 1]$ sedemikian sehingga $\beta_n \in (k, 1]$. Definisi barisan (x_n) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 &\in C, \\ x_{n+1} &= (1-\alpha_n)(\beta_n x_n + (1-\beta_n)Sx_n) + \alpha_n(\gamma_n x_n + (1-\gamma_n)Tx_n), \end{aligned} \quad (2.1)$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

- (T1) Jika $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\beta_n - \gamma_n) > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1-\gamma_n) < \infty$, dan $1+k < (2-\alpha_n)\beta_n + \alpha_n\gamma_n$, maka (x_n) konvergen lemah ke $q \in F(S)$.
 (T2) Jika $\beta_n > \gamma_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\beta_n) < \infty$, $2\beta_n - 1 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n) > 0$, dan $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)(2\beta_n - 1 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)) > 0$, maka (x_n) konvergen lemah ke $q \in F(T)$.
 (T3) Jika $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 0$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1-\alpha_n) > 0$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1-\beta_n) > 0$, dan $\liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(1-\gamma_n) > 0$, maka (x_n) konvergen lemah ke $q \in F(S) \cap F(T)$.

Bukti. Misalkan $U_n = \beta_n I + (1-\beta_n)S$ dan $V_n = \gamma_n I + (1-\gamma_n)T$. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) terbatas. Berdasarkan Lema 1.5(1) dan karena S adalah suatu pemetaan k pseudononspreading sejati, maka untuk setiap

$x, y \in C$ diperoleh

$$\begin{aligned}\|U_n x - U_n y\|^2 &= \|\beta_n(x - y) + (1 - \beta_n)(Sx - Sy)\|^2 \\ &\leq \beta_n\|x - y\|^2 + (1 - \beta_n)(\|x - y\|^2 + 2\langle x - Sx, y - Sy \rangle \\ &\quad + k\|x - Sx - (y - Sy)\|^2) - \beta_n(1 - \beta_n)\|x - Sx - (y - Sy)\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 + 2(1 - \beta_n)\langle x - Sx, y - Sy \rangle.\end{aligned}$$

Karena $U_n = \beta_n I + (1 - \beta_n)S$ maka $(1 - \beta_n)Sy = U_n y - \beta_n y$ untuk setiap $y \in C$, sehingga diperoleh

$$\|U_n x - U_n y\|^2 \leq \|x - y\|^2 + 2\langle x - Sx, y - U_n y \rangle. \quad (2.2)$$

Misalkan $p \in F(S) \cap F(T)$, dengan demikian $p = Sp$ sehingga

$$U_n p = \beta_n p + (1 - \beta_n)Sp = p. \quad (2.3)$$

Dari persamaan (2.2) dan persamaan (2.3), diperoleh

$$\|U_n x_n - p\|^2 = \|U_n x_n - U_n p\|^2 \leq \|x_n - p\|^2.$$

Karena T merupakan pemetaan *nonexpansive* dan $F(T) \neq \emptyset$, maka untuk setiap $p \in F(S) \cap F(T)$ diperoleh

$$\begin{aligned}\|V_n x_n - p\| &= \|\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Tx_n - p\| \\ &\leq \|\gamma_n(x_n - p)\| + \|(1 - \gamma_n)(Tx_n - p)\| \\ &\leq \|x_n - p\|.\end{aligned} \quad (2.4)$$

Dari persamaan (2.2) – persamaan (2.4), untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\|^2 &= \|(1 - \alpha_n)U_n x_n + \alpha_n V_n x_n - p\|^2 \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|U_n x_n - p\|^2 + \alpha_n\|V_n x_n - p\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2.\end{aligned} \quad (2.5)$$

Dengan demikian $(\|x_n - p\|)$ bukan barisan naik, mengakibatkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ ada dan karena itu (x_n) terbatas. Misalkan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c. \quad (2.6)$$

Untuk membuktikan $(T1)$, misalkan

$$z_{n+1} = (1 - \alpha_n)U_n x_n + \alpha_n(\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Sx_n), \quad (2.7)$$

dan $A = I - S$, maka

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z_{n+1}\| &= \alpha_n\|\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Tx_n - \gamma_n x_n - (1 - \gamma_n)Sx_n\| \\ &= \alpha_n(1 - \gamma_n)\|Tx_n - Sx_n\|.\end{aligned} \quad (2.8)$$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \gamma_n) < \infty$ maka dari [2,7], $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \gamma_n)$ konvergen dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1 - \gamma_n) = 0$. Oleh karena itu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_n\| = 0$ dan diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c. \quad (2.9)$$

Karena $U_n = \beta_n I + (1 - \beta_n)S$, diperoleh

$$U_n x_n - Sx_n = \beta_n A x_n \text{ dan } U_n x_n - x_n = (1 - \beta_n)A x_n.$$

Dari Lema 1.7, Lema 1.8, $Ap = 0$, dan persamaan di atas, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - p\|^2 &= \|(1 - \alpha_n)U_n x_n + \alpha_n(\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Sx_n) - p\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)\{(1 - k) - 2(1 - \beta_n) - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)\}\|Ax_n\|^2. \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\alpha_n(\beta_n - \gamma_n)\{(1 - k) - 2(1 - \beta_n) - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)\}\|Ax_n\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - \|z_{n+1} - p\|^2. \quad (2.10)$$

Karena $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\beta_n - \gamma_n) > 0$ dan $(1 - k - 2(1 - \beta_n) - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)) > 0$, akibatnya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Sx_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = 0. \quad (2.11)$$

Karena (x_n) barisan terbatas, maka ada suatu subbarisan $(x_{n_i}) \subset (x_n)$ sedemikian sehingga (x_{n_i}) konvergen lemah ke q . Dari Lema 1.8 diperoleh $q \in F(S)$. Untuk menunjukkan kesimpulan perlu ditunjukkan bahwa untuk subbarisan lain $(x_{n_j}) \subset (x_n)$, sedemikian sehingga jika (x_{n_j}) konvergen lemah ke $v \in F(S)$, maka $q = v$. Sebelum membuktikan ini terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa untuk sebarang $z \in F(S)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$ ada. Perhatikan bahwa

$$U_n z = \beta_n z + (1 - \beta_n)S z = z, \quad (2.12)$$

dan untuk setiap $z \in F(S)$ diperoleh

$$\|U_n x_n - z\|^2 = \|U_n x_n - U_n z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2. \quad (2.13)$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - z\| &= \|(1 - \alpha_n)U_n x_n + \alpha_n(\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Sx_n) - z\| \\ &\leq \|z_n - z\| + \|x_n - z_n\| + \alpha_n(1 - \gamma_n)\|Sx_n - z\|. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \gamma_n) < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_n\| = 0$, dan dari [3] $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z\|$ ada, mengakibatkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$ juga ada. Misalkan $q \neq v$, dari [3] diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\| &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - q\| < \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - v\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - v\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - v\| \\ &< \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - q\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\|, \end{aligned} \quad (2.15)$$

yang merupakan suatu kontradiksi. Oleh karena itu mestilah $q = v$ dan (x_n) konvergen lemah ke $q \in F(S)$.

Untuk membuktikan (T2), misalkan

$$z_{n+1} = (1 - \alpha_n)(\beta_n x_n + (1 - \beta_n)Tx_n) + \alpha_n V_n x_n, \quad (2.16)$$

maka diperoleh

$$\|x_{n+1} - z_{n+1}\| \leq (1 - \beta_n)\|Sx_n - Tx_n\|. \quad (2.17)$$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \beta_n) < \infty$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) = 0$. Oleh karena itu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - z_{n+1}\| = 0$. Karena (x_n) adalah barisan terbatas, maka (z_n) juga

terbatas. Misalkan $B = I - T$ dan untuk setiap $p \in F(S) \cap F(T)$, maka $Bp = 0$ sehingga

$$\|z_{n+1} - p\|^2 = \|(1 - \alpha_n)(\beta_n x_n + (1 - \beta_n)Tx_n) + \alpha_n V_n x_n - p\|^2$$

Karena T pemetaan *nonexpansive*, $Tp = p$, dan $-Bx_n = Tx_n - x_n$, dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - p\|^2 &\leq \|x_n - p\|^2 - 2\alpha_n(\beta_n - \gamma_n)\langle x_n - p, Bx_n - Bp \rangle + 2\alpha_n(1 - \beta_n) \\ &\quad (\beta_n - \gamma_n)\langle Bx_n, Bx_n \rangle + \alpha_n^2(\beta_n - \gamma_n)^2\|Bx_n\|^2. \end{aligned}$$

dari [5] dengan $B = I - T$ adalah *1/2 invers monoton kuat*, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - p\|^2 &\leq \|x_n - p\|^2 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)\|Bx_n - Bp\|^2 + 2\alpha_n(1 - \beta_n) \\ &\quad (\beta_n - \gamma_n)\|Bx_n\|^2 + \alpha_n^2(\beta_n - \gamma_n)^2\|Bx_n\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)\{1 - 2(1 - \beta_n) - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)\}\|Bx_n\|^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dengan demikian untuk $p \in F(S) \cap F(T)$, berlaku

$$\alpha_n(\beta_n - \gamma_n)\{1 - 2(1 - \beta_n) - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)\}\|Bx_n\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - \|z_{n+1} - p\|^2. \quad (2.19)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (2.19) dari $n = 1$ hingga N , diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)(2\beta_n - 1 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n))\|Bx_n\|^2 &\leq \sum_{n=1}^N \{\|x_n - p\|^2 - \|z_{n+1} - p\|^2\} \\ &\leq \|x_1 - p\|^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \{\|x_{n+1} - p\|^2 - \|z_{n+1} - p\|^2\} \\ &\leq \|x_1 - p\|^2 + \sum_{n=1}^{N-1} (\|x_{n+1} - p\| + \|z_{n+1} - p\|)\|x_{n+1} - z_{n+1}\| \\ &\leq \|x_1 - p\|^2 + \sum_{n=1}^{N-1} (1 - \beta_n)(\|x_{n+1} - p\| + \|z_{n+1} - p\|)\|Sx_n - Tx_n\| \\ &\leq \|x_1 - p\|^2 + M \sum_{n=1}^{N-1} (1 - \beta_n), \end{aligned} \quad (2.20)$$

dengan $M = \sup_{n \in N} \{(\|x_{n+1} - p\| + \|z_{n+1} - p\|)\|Sx_n - Tx_n\|\}$.

Misalkan $N \rightarrow \infty$, dan karena $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \beta_n) < \infty$, diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)(2\beta_n - 1 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n))\|Bx_n\|^2 \leq \|x_1 - p\|^2 + M \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \beta_n) < \infty. \quad (2.21)$$

Dari [7], jika $\alpha_n > 0$, $(\beta_n - \gamma_n) > 0$, dan $2\beta_n - 1 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n) > 0$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)(2\beta_n - 1 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)) > 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)(2\beta_n - 1 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)) = \infty$. Oleh karena itu diperoleh

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|Bx_n\| = 0. \quad (2.22)$$

Karena T merupakan pemetaan *nonexpansive*, dari [7] diperoleh

$$\begin{aligned} \|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| &= \|Tx_{n+1} - (1 - \alpha_n)U_n x_n - \alpha_n V_n x_n\| \\ &\leq \|Tx_n - x_n\| + (1 - \beta_n)(\|Sx_n - x_n\| + \|Tx_n - Sx_n\|) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \beta_n) < \infty$, dari [3] maka limit dari $(\|Tx_n - x_n\|)$ ada, dan dari persamaan (2.22) diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = 0. \quad (2.24)$$

Karena (x_n) adalah barisan terbatas, maka ada suatu subbarisan $(x_{n_i}) \subset (x_n)$ sedemikian sehingga (x_{n_i}) konvergen lemah ke q . Suatu pemetaan *nonexpansive* T merupakan *demiclosed* dengan $q \in F(T)$. Berdasarkan bukti bagian (T1), (x_n) konvergen lemah ke $q \in F(T)$.

(T3). Dari persamaan (2.5) dan persamaan (2.6), untuk sebarang $p \in F(S) \cap F(T)$ diperoleh

$$0 \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2 \rightarrow c^2 - c^2 = 0. \quad (2.25)$$

Karena $n \rightarrow \infty$, pertama akan ditunjukkan bahwa (x_n) konvergen lemah untuk beberapa titik di $F(S)$. Dari persamaan (2.2) – persamaan (2.4) diperoleh

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)\|U_n x_n - p\|^2 + \alpha_n\|x_n - p\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x_n - p\|^2 - (1 - \alpha_n)\|U_n x_n - p\|^2 - \alpha_n\|x_n - p\|^2 \\ &= (1 - \alpha_n)(\|x_n - p\|^2 - \|\beta_n x_n + (1 - \beta_n)Sx_n - p\|^2) \\ &\leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Karena $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha_n) > 0$, dari persamaan (2.25) dan persamaan (2.27) diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - p\|^2 - \|\beta_n x_n + (1 - \beta_n)Sx_n - p\|^2) = 0. \quad (2.28)$$

Dari Lema 1.5(1) diperoleh

$$\begin{aligned} \|\beta_n x_n + (1 - \beta_n)Sx_n - p\|^2 &= \|\beta_n(x_n - p) + (1 - \beta_n)(Sx_n - p)\|^2 \\ &= \beta_n\|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n)\|Sx_n - p\|^2 - \beta_n(1 - \beta_n)\|x_n - Sx_n\|^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Karena S adalah suatu pemetaan *k pseudononspreading* sejati, $p \in F(S)$, dan dari persamaan (1.4) diperoleh

$$\beta_n(1 - \beta_n)\|x_n - Sx_n\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 + k(1 - \beta_n)\|x_n - Sx_n\|^2 - \|\beta_n x_n + (1 - \beta_n)Sx_n - p\|^2. \quad (2.30)$$

Dengan demikian berlaku

$$(1 - \beta_n)(\beta_n - k)\|x_n - Sx_n\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - \|\beta_n x_n + (1 - \beta_n)Sx_n - p\|^2. \quad (2.31)$$

Karena $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) > 0$, dari persamaan (2.28) diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Sx_n\|^2 = 0. \quad (2.32)$$

Sebagaimana pada pembuktian (T1), dari Lema 1.8 jika (x_{n_i}) konvergen lemah ke v , maka $v \in F(S)$. Akan ditunjukkan bahwa $v \in F(T)$. Dari persamaan (2.2) – persamaan (2.4), untuk $p \in F(S) \cap F(T)$, maka

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\|^2 + \alpha_n\|\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Tx_n - p\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \|x_n - p\|^2 - (1 - \alpha_n)\|x_n - p\|^2 - \alpha_n\|\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Tx_n - p\|^2 \\
 &= \alpha_n(\|x_n - p\|^2 - \|\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Tx_n - p\|^2) \\
 &\leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Karena $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 0$, dari persamaan (2.25) diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - p\|^2 - \|\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Tx_n - p\|^2) = 0. \tag{2.35}$$

Karena T merupakan pemetaan *nonexpansive* dan $p = Tp$, maka

$$\begin{aligned}
 \|\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Tx_n - p\|^2 &= \|\gamma_n(x_n - p) + (1 - \gamma_n)(Tx_n - p)\|^2 \\
 &\leq \|x_n - p\|^2 - \gamma_n(1 - \gamma_n)\|x_n - Tx_n\|^2.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Karena $\liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(1 - \gamma_n) > 0$, dari persamaan (2.35) diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\|^2 = 0. \tag{2.37}$$

Karena (x_{n_i}) konvergen lemah ke q , maka $q \in F(T)$. Misalkan (x_{n_j}) merupakan subbarisan lain dari (x_n) sedemikian sehingga (x_{n_j}) konvergen lemah ke v . Oleh karena itu diperoleh $q = v$. Sebaliknya, jika $q \neq v$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\| &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - q\| \\
 &< \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - v\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - v\| \\
 &< \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - q\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\|.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Hal ini merupakan suatu kontradiksi, maka dari itu mestilah $q = v$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa (x_n) konvergen lemah ke $q \in F(S) \cap F(T)$. $\square$

2.2. Beberapa Akibat Teorema Utama

Untuk pemetaan *nonspreading* S , misalkan $k = 0$, sehingga diperoleh

Akibat 2.2. [5] Misalkan C subhimpunan konveks tertutup yang tak kosong dari suatu ruang Hilbert H , $S : C \rightarrow C$ adalah suatu pemetaan *nonspreading*, dan $T : C \rightarrow C$ adalah pemetaan *nonexpansive* sedemikian sehingga $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$. Definisi barisan (x_n) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x_1 &\in C, \\
 x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)(\beta_n x_n + (1 - \beta_n)Sx_n) + \alpha_n(\gamma_n x_n + (1 - \gamma_n)Tx_n),
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ adalah barisan dalam selang $[0, 1]$.

- (1) Jika $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\beta_n - \gamma_n) > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \gamma_n) < \infty$, dan $1 < (2 - \alpha_n)\beta_n + \alpha_n\gamma_n$, maka (x_n) konvergen lemah ke $q \in F(S)$.
- (2) Jika $\beta_n > \gamma_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \beta_n) < \infty$, $2\beta_n - 1 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n) > 0$, dan $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)(2\beta_n - 1 - \alpha_n(\beta_n - \gamma_n)) > 0$, maka (x_n) konvergen lemah ke $q \in F(T)$.

- (3) Jika $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 0$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha_n) > 0$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) > 0$, dan $\liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(1 - \gamma_n) > 0$, maka (x_n) konvergen lemah ke $q \in F(S) \cap F(T)$.

Akibat 2.3. [5] Misalkan C suatu subhimpunan konveks tertutup yang tak kosong dari ruang Hilbert H dan $S : C \rightarrow C$ suatu pemetaan nonspreading sedemikian sehingga $F(S) \neq \emptyset$. Definisi barisan (x_n) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 &\in C, \\ x_{n+1} &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) Sx_n, \end{aligned} \tag{2.40}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan (α_n) adalah barisan dalam selang $[0, 1]$. Jika $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 0$, maka (x_n) konvergen lemah ke $q \in F(S)$.

Bukti. Dengan memisalkan $\beta_n = 0, \gamma_n = 1$ untuk $n \in \mathbb{N}$ pada Teorema 2.1, maka diperoleh akibat di atas. $\square$

Akibat 2.4. [5] Misalkan C merupakan subhimpunan konveks tertutup yang tak kosong dari suatu ruang Hilbert H dan $T : C \rightarrow C$ merupakan pemetaan nonexpansive sedemikian sehingga $F(T) \neq \emptyset$. Definisi barisan (x_n) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 &\in C, \\ x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \end{aligned} \tag{2.41}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan (α_n) adalah barisan dalam selang $[0, 1]$. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, maka (x_n) konvergen lemah ke $q \in F(T)$.

Bukti. Dengan memisalkan $\beta_n = 1, \gamma_n = 0$ untuk $n \in \mathbb{N}$ pada Teorema 2.1, maka diperoleh akibat tersebut di atas. $\square$

3. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Syafrizal Sy, Bapak Admi Nazra, Bapak Muhafzan, Bapak Efendi, dan Bapak Mahdhivan Syafwan yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Agarwal, R.P., D. O'Regan dan D.R. Sahu. 2009. *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*. New York: Springer.
- [2] Bartle, R.G. dan D.R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis (Third Edition)*. New York: John Wiley and Sons.
- [3] Berinde, V. 2007. *Iterative Approxomation of Fixed Point*. New York: Springer.
- [4] Debnath, L. dan P. Mikusiński. 2005. *Hilbert Space with Applications*. California: Elsevier.
- [5] Kyung, S.K. 2012. *Approximating common fixed points of nonspreading-type mappings and nonexpansive mappings in a Hilbert space*. Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis. **10**: 1155 – 1173.

- [6] Shigeru, I. dan W. Takahashi. 2009. *Approximating common fixed point of non-expansive mappings and nonspreading mappings in a Hilbert space*. Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications. **71**: e2082 – e2089.
- [7] Tan, K.K. dan H.K Xu. 1993. *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **178**: 301 – 308.