Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **1** Hal. 163 – 170
Edisi Mei 2019
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

PENGARUH PENGGUNAAN HUKUM MORTALITAS *GOMPERTZ* PADA PENENTUAN BESARNYA ASURANSI JIWA DWIGUNA DENGAN METODE *FULL PRELIMINARY TERM*

KIKI RAMADANI, DODI DEVIANTO, IZZATI RAHMI HG
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : kiki.ramadani83@gmail.com

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Asuransi jiwa merupakan suatu produk yang berguna untuk mengurangi risiko yang datang secara tiba-tiba di masa mendatang. Asuransi jiwa dwiguna adalah salah satu jenis asuransi jiwa yang memberikan dua manfaat sekaligus yaitu memberikan uang pertanggungan ketika tertanggung meninggal dunia atau memberikan uang pertanggungan ketika tertanggung masih hidup hingga akhir masa pertanggungan. Tertanggung memiliki kewajiban untuk membayarkan premi yang disimpan perusahaan asuransi sebagai cadangan untuk menutupi klaim oleh tertanggung. Premi dapat dihitung dengan tabel mortalitas dan hukum mortalitas *Gompertz*. Salah satu metode perhitungan cadangan yaitu yaitu Metode *Full Preliminary Term*. Perhitungan cadangan dengan hukum mortalitas *Gompertz* dan tanpa hukum mortalitas *Gompertz* memberikan hasil yang sama pada akhir pertanggungan sesuai dengan kontrak yang disepakati. Namun, apabila terjadi klaim di pertengahan perhitungan cadangan tanpa hukum mortalitas *Gompertz* memberikan hasil lebih baik.

Kata Kunci: Cadangan, Metode *Full Preliminary Term*, Hukum Mortalitas *Gompertz*

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan saat ini risiko seperti kecelakaan, penyakit dan bencana alam bisa datang kapan saja. Untuk mengurangi risiko tersebut seseorang memilih mengikuti asuransi jiwa. Berdasarkan waktu perlindungannya asuransi jiwa terdiri dari asuransi jiwa berjangka, asuransi jiwa seumur hidup, asuransi jiwa dwiguna dan asuransi jiwa dwiguna murni. Asuransi jiwa dwiguna merupakan asuransi jiwa yang memberikan manfaat jika tertanggung meninggal dunia dalam masa kontrak asuransi atau memberikan manfaat apabila tertanggung masih tetap hidup pada akhir masa asuransi.

Saat mengikuti asuransi jiwa, tertanggung berkewajiban membayar premi kepada perusahaan asuransi untuk memproteksi kemungkinan terjadinya risiko dan premi tersebut disimpan perusahaan sebagai cadangan. Selain untuk membayarkan

klaim kepada tertanggung secara tiba-tiba, cadangan juga digunakan untuk membayarkan biaya operasional perusahaan pada tahun pertama. Salah satu metode perhitungan cadangan adalah metode *Full Preliminary Term* yaitu metode yang mengasumsikan cadangan pada tahun pertama bernilai nol [2]. Artinya,cadangan pada tahun pertama digunakan perusahaan asuransi untuk menutupi biaya operasional sehingga perusahaan asuransi tidak mengalami kerugian.

Perhitungan cadangan dengan metode *Full Preliminary Term* menggunakan premi bersih dalam perhitungannya. Sebelum menentukan besarnya cadangan, di tentukan terlebih dahulu premi tunggal bersih, premi tahunan bersih asuransi jiwa dwiguna dan anuitas hidup awal berjangka berdasarkan tabel mortalitas dan hukum mortalitas *Gompertz*.

Pada asuransi jiwa dwiguna, besarnya premi tunggal bersih untuk tertanggung berusia x tahun, dengan jangka waktu pertanggungan n tahun dan besar uang pertanggungan sebesar R yaitu [1]:

$$A_{x:\overline{n|}} = R\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \tag{1.1}$$

Kemudian, untuk tertanggung berusia $x + t$ tahun, dengan jangka waktu pertanggungan $n-t$ tahun dan uang pertanggungan sebesar R, premi tunggal bersihnya yaitu [3]:

$$A_{x+t:\overline{n-t|}} = R\frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}}. \tag{1.2}$$

Premi tahunan bersih yang harus dibayarkan oleh tertanggung berusia x tahun, dengan jangka waktu pertanggungan n tahun, pembayaran premi selama m tahun dan uang pertanggungan sebesar R yaitu [4]:

$${}_mP_{x:\overline{n|}} = R\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}. \tag{1.3}$$

Anuitas hidup awal berjangka dengan masa pertanggungan selama n tahun, pembayaran premi selama m tahun dan uang pertanggungan yang diharapkan sebesar Rp.1 yaitu [1]:

$$\ddot{a}_{x:\overline{m|}} = \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}. \tag{1.4}$$

Kemudian, untuk tertanggung berusia $x + t$ tahun, dengan jangka waktu pembayaran premi selama $m - t$ tahun dan uang pertanggungan yang diharapkan sebesar Rp.1, anuitas hidup awal berjangkanya yaitu [5]:

$$\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} = \frac{N_{x+t} - N_{x+m}}{D_{x+t}}. \tag{1.5}$$

2. Tabel Mortalitas *Gompertz*

Pada tabel mortalitas Indonesia tahun 1999, usia rata-rata untuk jenis kelamin laki-laki dinotasikan dengan μ dan standar deviasi dari usia laki-laki dinotasikan dengan σ yaitu:

$$\mu = 50.$$
$$\sigma = 29.15475947.$$

Kemudian, substitusikan nilai σ, γ, π dan μ yaitu [6]:

$$b = 22,74340264.$$
$$a = 63.19332423.$$

Dengan melakukan subtitusi nilai a dan b diperoleh

$$g = e^{-e^{-a/b}} = 0.938950832.$$
$$c = e^{1/b} = 1.044721754.$$
$$B = -(\ln g)(\ln c) = 0.002755944.$$

Peluang hidup seseorang yang berusia x tahun untuk hidup selama t tahun berdasarkan hukum mortalitas *Gompertz* diperoleh

$$_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{kg^{c^{x+t}}}{kg^{c^x}} = g^{c^x c^t} g^{-c^x} = g^{c^x(c^t-1)}. \tag{2.1}$$

Peluang seseorang berusia x tahun akan meninggal pada jangka waktu t tahun berdasarkan hukum mortalitas *Gompertz* diperoleh

$$_tq_x = 1 - {}_tp_x = 1 - g^{c^x(c^t-1)}. \tag{2.2}$$

Kemudian, akan ditentukan jumlah orang yang masih hidup setiap tahunnya yang dinotasikan dengan l_{x+1} yaitu

$$l_{x+1} = g^{c^x(c-1)} l_x. \tag{2.3}$$

Diasumsikan bahwa, banyaknya orang yang hidup pada usia 0 tahun adalah l_0 dimana $l_0 = 100000$ dan usia maksimum yang dicapai $w = 100$ tahun diperoleh

$$\begin{aligned}
l_1 &= 0.938950832^{1.044721754^0(1.044721754^1-1)}100000 = 99720\\
l_2 &= 0.938950832^{1.044721754^1(1.044721754^1-1)}99720 = 99429\\
l_3 &= 0.938950832^{1.044721754^2(1.044721754^1-1)}99429 = 99126\\
&\vdots\\
l_{100} &= 0.938950832^{1.044721754^{99}(1.044721754^1-1)}836 = 672.
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditentukan banyaknya orang yang meninggal pada usia x tahun dalam jangka waktu $x+1$ tahun yaitu

$$d_x = l_x - l_{x+1}. \tag{2.4}$$

Tahap selanjutnya adalah menyusun tabel mortalitas *Gompertz* dengan menghitung nilai dariD_x, M_x, C_x dan N_x.

3. Metode *Full Preliminary Term*

Pada umumnya perusahaan asuransi menghindari cadangan yang bernilai negatif sebab menimbulkan kerugian bagi perusahaan. Pada tahun pertama, perusahaan asuransi mengeluarkan biaya yang cukup besar sehingga diperlukan cadangan untuk menutupi biaya tersebut. Metode *Full Preliminary Term* adalah salah satu metode perhitungan cadangan yang mengasumsikan cadangan pada akhir tahun

pertama adalah nol[2]. Dengan demikian, perusahaan asuransi mampu menutupi biaya pada tahun pertama dan memenuhi kewajiban di akhir tahun kontrak asuransi. Perhitungan cadangan dengan metode *Full Preliminary Term* diperoleh dari perluasan metode *Zillmer*. Adapun metode *Zillmer* merupakan metode perhitungan cadangan yang menggunakan metode prospektif sebagai dasar perhitungannya. Besarnya cadangan dengan metode *Zillmer* sebagai berikut [2]:

$$ {}^{m}_{t}V^{[z]}_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - \left({}_{m}P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \right) \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}. \tag{3.1} $$

Karena cadangan pada tahun pertama diasumsikan nol sehingga Persamaan (3.1) yaitu [5]:

$$ \begin{aligned} 0 &= A_{x+t:\overline{n-t}|} \left({}_{m}P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \right) \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \\ A_{x+t:\overline{n-t}|} &= \left({}_{m}P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \right) \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}. \end{aligned} \tag{3.2} $$

Pada Persamaan (3.2) terdapat α yang disebut tingkat *Zillmer*, sehingga α pada tahun pertama diperoleh

$$ \begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{A_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}} - {}_{m}P_{x:\overline{n}|} \right) \ddot{a}_{x:\overline{m}|} \\ &= \left(\frac{\frac{M_{x+1}-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+1}}}{\frac{N_{x+1}-N_{x+m}}{D_{x+1}}} - {}_{m}P_{x:\overline{n}|} \right) \ddot{a}_{x:\overline{m}|} \\ &= \left(\frac{M_{x+1} - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+m}} - {}_{m}P_{x:\overline{n}|} \right) \ddot{a}_{x:\overline{m}|} \\ &= \left({}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|} - {}_{m}P_{x:\overline{n}|} \right) \ddot{a}_{x:\overline{m}|}. \end{aligned} \tag{3.3} $$

Nilai α pada Persamaan (3.3) disubstitusikan ke Persamaan (3.1) diperoleh besarnya cadangan pada tahun ke -t asuransi jiwa dwiguna dengan metode *Full Preliminary Term* yang dinotasikan dengan ${}^{m}_{t}V^{[PT]}_{x:\overline{n}|}$ dengan pembayaran premi selama m tahun dalam jangka waktu pertanggungan n tahun yaitu [2]:

$$ {}^{m}_{t}V^{[PT]}_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|} \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}. \tag{3.4} $$

Dalam bentuk simbol komutasi, dengan uang pertanggungan sebesar R besarnya cadangan asuransi jiwa dwiguna dengan metode *Full Preliminary Term* yaitu [6]:

$$ \begin{aligned} {}^{m}_{t}V^{[PT]}_{x:\overline{n}|} = R \Bigg[& \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - \left(\frac{M_{x+1} - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+m}} \right) \\ & \left(\frac{N_{x+t} - N_{x+m}}{D_{x+t}} \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.5} $$

4. Ilustrasi Kasus

Ardi seorang wirausaha berusia 20 tahun mengikuti asuransi jiwa dwiguna 10 tahun. Rata-rata usia maksimum 100 tahun dengan uang pertanggungan yang diharapkan sebesar Rp.30,000,000. Pembayaran premi dilakukan 7 kali atau selama 7 tahun. Apabila terjadi sesuatu kepada Ardi, maka uang pertanggungan akan dibayarkan diakhir tahun dengan tingkat suku bunga 2.5%.

Berdasarkan ilustrasi kasus tersebut diketahui bahwa:

(i) Usia peserta asuransi (x) adalah 20 tahun
(ii) Usia maksimum (w) adalah 100 tahun
(iii) Jangka waktu pertanggungan (n) adalah 10 tahun
(iv) Pembayaran premi dilakukan (m) adalah 7 tahun
(v) Besar uang pertanggungan R adalah Rp.30,000,000
(vi) Tingkat suku bunga (i) adalah 2.5%

Selanjutnya akan ditentukan besar cadangan asuransi jiwa dwiguna dengan metode *Full Preliminary Term* dan besar cadangan asuransi jiwa dwiguna berdasarkan hukum mortalitas *Gompertz* dengan metode *Full Preliminary Term.*

(1) Besar cadangan asuransi jiwa dwiguna dengan metode *Full Preliminary Term.* Metode *Full Preliminary Term* mengasumsikan bahwa cadangan tahun pertama bernilai nol. Besarnya cadangan asuransi jiwa dwiguna pada x= 20 tahun, n= 10 tahun, m= 7 tahun dan R= Rp.30,000,000,-. Dalam perhitungannya menggunakan Tabel Mortalitas Indonesia tahun 1999 jenis kelamin laki-laki. Anuitas hidup awal berjangka yaitu

$$\ddot{a}_{22:\overline{5}|} = 4.748752576.$$

Karena uang pertanggungan sebesar Rp.30,000,000,-, premi tunggal bersih asuransi jiwa dwiguna diperoleh

$$A_{22:\overline{8}|} = Rp.24,647,790.22,-.$$

Kemudian, premi tahunan bersih asuransi jiwa dwiguna dengan uang pertanggungan sebesar Rp.30,000,000,-diperoleh

$${}_6P_{21:\overline{9}|} = Rp.4,275,469.21,-.$$

Berdasarkan Persamaan (3.4), besar cadangan pada tahun kedua dengan metode *Full Preliminary Term* adalah

$$\begin{aligned} {}^{7}_{2}V^{[PT]}_{20:\overline{10}|} &= A_{22:\overline{8}|} - {}_6P_{21:\overline{9}|}\ddot{a}_{22:\overline{5}|} \\ &= Rp.24,647,790.22 - (Rp.4,275,469.21)(4.748752576) \\ &= Rp.4,344,644.81,-. \end{aligned}$$

Diperoleh cadangan pada tahun kedua adalah Rp.4,344,644.81,-. Dengan cara yang sama, besarnya cadangan asuransi jiwa dwiguna saat tertanggung berusia 20 tahun, 30 tahun dan 40 tahun dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Cadangan Asuransi Jiwa Dwiguna dengan Metode *Full Preliminary Term* pada $n = 10$ tahun Selama $m = 7$ tahun

Besar Cadangan (Rupiah)			
Th	x=20 tahun	x=30 tahun	x=40 tahun
1	0	0	0
2	4344644.807	4347321.735	4339980.984
3	8804849.325	8808814.973	8795684.334
4	13383510.64	13387624.41	13371161.02
5	18083961.81	18086641.41	18071027.69
6	22908661.15	22910121.1	22900899.95
7	27860830.66	27862031.28	27867394.71
8	28555403.25	28555866.45	28557892.33
9	29268292.68	29268292.68	29268292.68
10	30000000.00	30000000.00	30000000.00

Berdasarkan Tabel 1. terlihat bahwa semakin besar usia tertanggung saat mengikuti asuransi jiwa dwiguna maka cadangan lebih besar.

(2) Besar cadangan asuransi jiwa dwiguna berdasarkan hukum mortalitas *Gompertz* dengan metode *Full Preliminary Term*.
Metode *Full Preliminary Term* mengasumsikan bahwa cadangan tahun pertama bernilai nol. Besarnya cadangan asuransi jiwa dwiguna pada x= 20 tahun, n= 10 tahun, m= 7 tahun dan R= Rp.30,000,000,-. Dalam perhitungannya menggunakan tabel mortalitas *Gompertz*. Anuitas hidup awal berjangka yaitu

$$\ddot{a}_{22:\overline{5}|} = 4.748752576.$$

Karena uang pertanggungan sebesar Rp.30,000,000,-, premi tunggal bersih asuransi jiwa dwiguna diperoleh

$$A_{22:\overline{8}|} = Rp.24,647,790.22,-.$$

Kemudian, premi tahunan bersih asuransi jiwa dwiguna dengan uang pertanggungan sebesar Rp.30,000,000,- diperoleh

$${}_6P_{21:\overline{9}|} = Rp.4,275,469.21,-.$$

Berdasarkan Persamaan (3.4), besar cadangan pada tahun kedua dengan metode *Full Preliminary Term* adalah

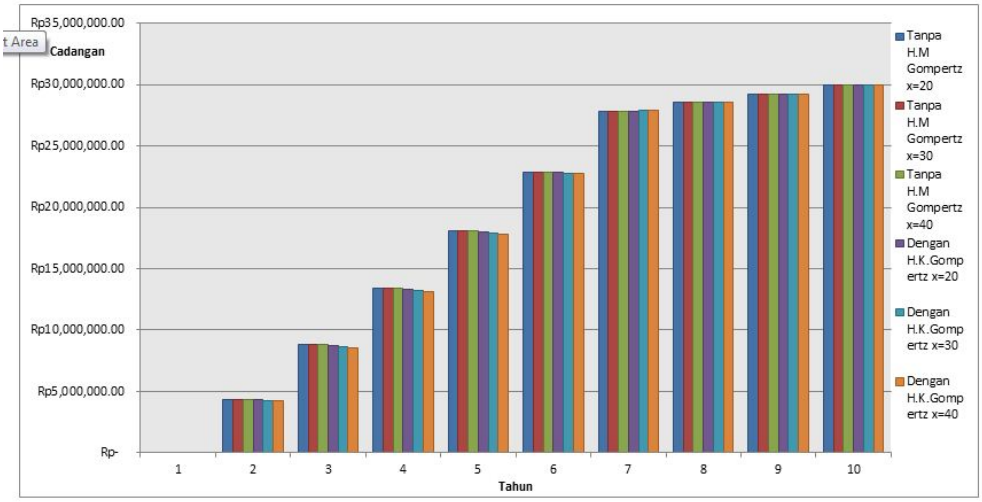
$$\begin{aligned} {}^{7}_{2}V^{[PT]}_{20:\overline{10}|} &= A_{22:\overline{8}|} - {}_6P_{21:\overline{9}|}\ddot{a}_{22:\overline{5}|} \\ &= Rp.24,647,790.22 - (Rp.4,275,469.21)(4.748752576) \\ &= Rp.4,344,644.81,-. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, besarnya cadangan asuransi jiwa dwiguna saat tertanggung berusia 20 tahun, 30 tahun dan 40 tahun dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Cadangan Asuransi Jiwa Dwiguna Berdasarkan Hukum Mortalitas *Gompertz* dengan Metode *Full Preliminary Term* pada n=10 tahun Selama m=7 tahun

Besar Cadangan (Rupiah)			
Th	x=20 tahun	x=30 tahun	x= 40 tahun
1	0	0	0
2	4292547.511	4254936.864	4196981.381
3	8716792.188	8653744.103	8556239.624
4	13279638.11	13205754.94	13091041.62
5	17988543.33	17921180.35	17816115.55
6	22851573.02	22811204.38	22747833.36
7	27877458.38	27888090.98	27904419.00
8	28561247.25	28564985.24	28570749.62
9	29268292.68	29268292.68	29268292.68
10	30000000.00	30000000.00	30000000.00

Pada Tabel 2. terlihat bahwa semakin besar usia tertanggung saat mengikuti asuransi jiwa dwiguna maka cadangan cenderung menurun karena adanya konstanta *Gompertz*. Namun pada tahun ke-7 hingga tahun ke-10, semakin besar usia semakin besar cadangan karena premi tahunan bersih yang dibayarkan hanya sampai tahun ke-7 sehingga untuk cadangan pada tahun berikutnya hanya bergantung pada besarnya premi tunggal bersih asuransi jiwa dwiguna.



Gambar 1: Grafik Perbandingan Cadangan Asuransi Jiwa Dwiguna dengan Metode *Full Preliminary Term* dan Berdasarkan Hukum Mortalitas *Gompertz* dengan Metode *Full Preliminary Term* pada n=10 tahun Selama m=7 tahun

Berdasarkan Gambar 1, pada dua tahun menjelang waktu pertanggungan habis terlihat bahwa pada akhir pertanggungan besarnya cadangan asuransi jiwa dwiguna tanpa hukum mortalitas *Gompertz* dengan metode *Full Prelimi-*

nary Term dan berdasarkan hukum mortalitas *Gompertz* dengan metode *Full Preliminary Term* adalah sama dengan besar uang pertanggungan sehingga perusahaan asuransi dapat membayarkan sesuai dengan kontrak yang telah disepakati. Akan tetapi di usia yang sama, jika dipertengahan waktu pertanggungan terjadi klaim oleh tertanggung maka perhitungan cadangan menggunakan metode *Full Preliminary Term* tanpa hukum mortalitas *Gompertz* cenderung lebih baik di setiap tahunnya.

5. Kesimpulan

Berdasarkan ilustrasi kasus di atas dapat disimpulkan bahwa besar cadangan pada akhir pertanggungan tanpa hukum mortalitas *Gompertz* dan berdasarkan hukum mortalitas *Gompertz* dengan metode *Full Preliminary Term* bernilai sama. Oleh karena itu, perusahaan asuransi dapat membayarkan uang pertanggungan sesuai dengan kesepakatan. Pengaruh perhitungan cadangan berdasarkan hukum mortalitas *Gompertz* yaitu semakin besar usia tertanggung maka besarnya cadangan cenderung menurun karena terdapat konstanta *G*ompertz yang mempengaruhi besarnya cadangan. Jika tertanggung mengajukan klaim di tengah waktu pertanggungan, pada tahun yang sama dan di usia yang sama, perhitungan cadangan dengan metode *Full Preliminary Term* tanpa hukum mortalitas *Gompertz* memberikan hasil yang lebih baik di setiap tahunnya.

Daftar Pustaka

[1] Futami,T.1993. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian I. Ter. Dari Seimei Hoken Sugaku, Jokan(92 Revision)*. oleh Herliyanto, Gatot. Incorporated Foundation Oreintal Life Insurance Cultural development Center, Japan

[2] Futami,T.1993. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian II. Ter. Dari Seimei Hoken Sugaku, Gekan (92 Revision)*. oleh Herliyanto, Gatot. Incorporate Foundation Oreintal Life Insurance Cultural development Center, Japan. **2**(1): 1 – 5

[3] Oktavian, M.R., D. Devianto dan F. Yanuar.2015. Kajian *Metode Zillmer*, *Full Preliminary Term*, dan *Premium Sufficiency* dalam Menetukan Cadangan Premi pada Asuransi Jiwa Dwiguna, *Jurnal Matematika*, Universitas Andalas **3**: 160 – 167

[4] Ridanofyola, Narwen dan D. Devianto.2017. Penentuan Cadangan premi untuk Asuransi Joint Life dengan Menggunakan Metode Zillmer. *Jurnal Matematika*, Universitas Andalas **6**: 174 – 181

[5] Warni, F., D. Devianto dan R. Husna.2017. Penentuan Cadangan Asuransi Jiwa Berjangka pada Status Hidup Gabungan Menggunakan Metode *Premium Sufficiency*. *Jurnal Matematika*, Universitas Andalas **6**: 56 – 63.

[6] Willemse, W.J. & H.Koppelar.2000. *Knowledge Elicitation of Gompertz Law of Mortality*. Scandinavian Actuarial Journal **2**: 168 – 179