Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **1** Hal. 260 – 266
Edisi Mei 2019
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

DIMENSI METRIK PADA GRAF $R_n(q;r)m$

RENDY ADITYA PRATAMA, NARWEN, DES WELYYANTI
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : aprendy20@gmail.com

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstract. The metric dimension of a connected graph G is the cardinality of minimum resolving set in graph G. In this research, we find the metric dimension of $R_n(q;r)m$ graph, where $R_n(q;r)m$ graph is constructed by doing the subdivision operation on Lobster graph $L_n(q;r)$. We obtain that the metric dimension of $R_n(1;1)m$ graph for $n > 2$ is 2, the metric dimension of $R_n(q;1)m$ for $n \geq 2$, $q \geq 2$ is $n(q-1)$ and the metric dimension of $R_n(q;r)m$ graph for $n \geq 2$, $q \geq 1$ and $r \geq 2$ is $nq(r-1)$.

Kata Kunci: Graf $R_n(q;r)m$, Dimensi Metrik, Himpunan Pemisah

1. Pendahuluan

Dimensi metrik pertama kali dikenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1966. Untuk mendapatkan dimensi metrik bentuk tertentu ataupun kelas tertentu dilakukan analisis dari subkelas terlebih dahulu agar lebih mudah mencari dimensi metrik dari graf secara umum.

Misalkan suatu graf terhubung G, misalkan u dan v adalah titik-titik dalam graf terhubung G, panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G dinotasikan $d(u,v)$. Jika $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ suatu himpunan terurut dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik v di $V(G)$ maka representasi dari titik v terhadap S adalah $r(v|S) = (d(v,s_1), d(v,s_2), \cdots, d(v,s_k))$.

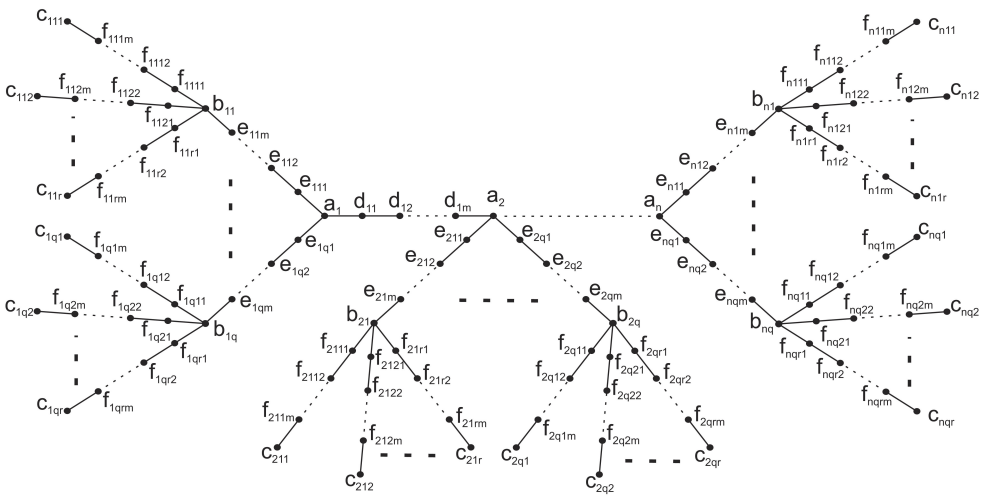
Jika $r(v|S)$ untuk setiap titik $v \in V(G)$ berbeda, maka S disebut himpunan pemisah dari G. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum (β). Kardinalitas dari himpunan pemisah minimum tersebut dinamakan dimensi metrik dari G, yang dinotasikan $\dim(G)$ [1].

Graf Lobster $L_n(q;r)$ adalah suatu pohon yang apabila dihapus semua titik berderajat satu menghasilkan graf *Caterpillar* (graf Ulat) [2], sedangkan graf ulat sendiri adalah suatu pohon yang apabila dihapus semua titik berderajat satu menghasilkan graf lintasan. Subdivisi adalah suatu graf yang diperoleh dari G dengan menyisipkan titik-titik berderajat dua ke dalam sisi-sisi dari G [3]. Pada tulisan ini akan dibahas dimensi metrik pada subdivisi graf $L_n(q;r)$ dengan $n \geq 2$ dengan menyisipkan m titik di setiap sisinya yang dinotasikan dengan $R_n(q;r)m$.

2. Kajian Pustaka

2.1. *Graf $R_n(q;r)m$*

Graf $R_n(q;r)m$ dibentuk dengan subdivisi pada graf Lobster $L_n(q;r)$ dengan menyisipkan m titik di setiap sisi pada graf Lobster $L_n(q;r)$. Contohnya, diberikan suatu graf $R_n(q;r)m$ berikut dengan $n \geq 2$, $q \geq 1$ dan $r \geq 2$ yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf $R_n(q;r)m$

Keterangan :
a_i : Titik tulang belakang
b_{ij} : Titik tangan yang melekat disetiap titik tulang belakang
c_{ijk}: Titik jari yang melekat di setiap titik tangan
d_{ih} : Titik yang disisipkan antara titik tulang belakang
e_{ijh} : Titik yang disisipkan antara titik tulang belakang dan titik tangan
f_{ijkh}: Titik yang disisipkan antara titik tangan dan titik jari

2.2. *Dimensi Metrik*

Misalkan G adalah suatu graf terhubung dan misalkan u dan v adalah titik-titik di G,jarak u ke v dinotasikan $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari pada G. Jika $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ suatu himpunan terurut dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik $v \in V(G)$ maka representasi dari titik v terhadap S adalah

$$r(v|S) = (d(v,s_1), d(v,s_2), \cdots, d(v,s_k)).$$

Jika $r(v|S)$ untuk setiap titik $v \in V(G)$ berbeda, maka S disebut himpunan pemisah dari G. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum (β). Kardinalitas dari himpunan pemisah minimum.

Chartrand menunjukkan dimensi metrik untuk graf lintasan. Hal tersebut dipaparkan pada Teorema 2.1.

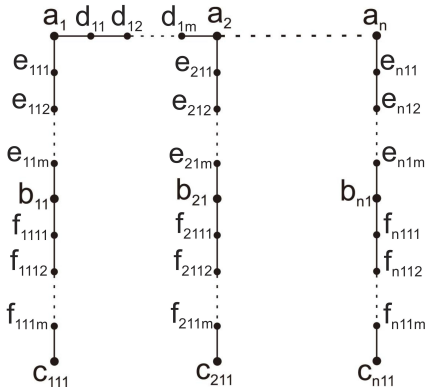
Teorema 2.1. [1] *Diberikan graf terhubung G dan $v_i \in V(G)$ dengan $i = 1, 2, \cdots, n$. Graf G berdimensi metrik satu jika dan hanya jika graf G merupakan graf lintasan.*

3. Pembahasan

Pada bagian ini akan ditunjukkan dimensi metrik dari subdivisi graf Lobster yang dinotasikan $R_n(q;r)m$.

3.1. *Dimensi Metrik Graf $R_n(1;1)m$ untuk $n > 2$*

Graf $R_n(1;1)m$ untuk $n > 2$, dibentuk dengan subdivisi pada graf Lobster $L_n(1;1)$ untuk $n > 2$ dengan menyisipkan m titik pada setiap sisi pada graf Lobster $L_n(1;1)$, dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf $R_n(1;1)m$

Berikut diberikan Teorema 3.1 yang menunjukkan dimensi metrik graf $R_n(1;1)m$ untuk $n > 2$.

Teorema 3.1. *Misalkan terdapat graf $R_n(1;1)m$ yang berasal dari operasi subdivisi pada graf Lobster $L_n(1;1)$ untuk $n > 2$, dengan cara menyisipkan m titik pada setiap sisi di graf Lobster $L_n(1;1)$. Maka $\dim(R_n(1;1)m) = 2$, untuk $n > 2$.*

Bukti. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan himpunan $S = \{a_1, c_{n11}\}$ pada graf $R_n(1;1)m$. Representasi setiap titik pada graf $R_n(1;1)m$ adalah

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(a_i|S) &= ((i-1)(m+1), (n-i+2)(m-1), \text{ untuk } i = 1, 2, \cdots, n \\ \mathrm{r}(b_{i1}|S) &= (i(m+1), (n-i+3)(m-1)), \text{ untuk } i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ \mathrm{r}(b_{i1}|S) &= (i(m+1), m+1), \text{ untuk } i = n \end{aligned}$$

$$\mathrm{r}(c_{i11}|S) = ((i+1)(m+1), (n-i+4)(m-1), \text{ untuk } i = 1, 2, \cdots, n-1$$
$$\mathrm{r}(c_{i11}|S) = ((i+1)(m+1), 0), \text{ untuk } i = n$$

Untuk representasi titik-titik subdivisi pada graf $R_n(1;1)m$ terhadap S pasti juga akan menghasilkan representasi yang berbeda terhadap S. Karena Dari hasil di atas, diperoleh setiap titik pada graf $R_n(1;1)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap S. Karena kardinalitas himpunan pemisah adalah 2, dengan demikian diperoleh bahwa

$$\dim(R_n(1;1)m) \leq 2 \tag{3.1}$$

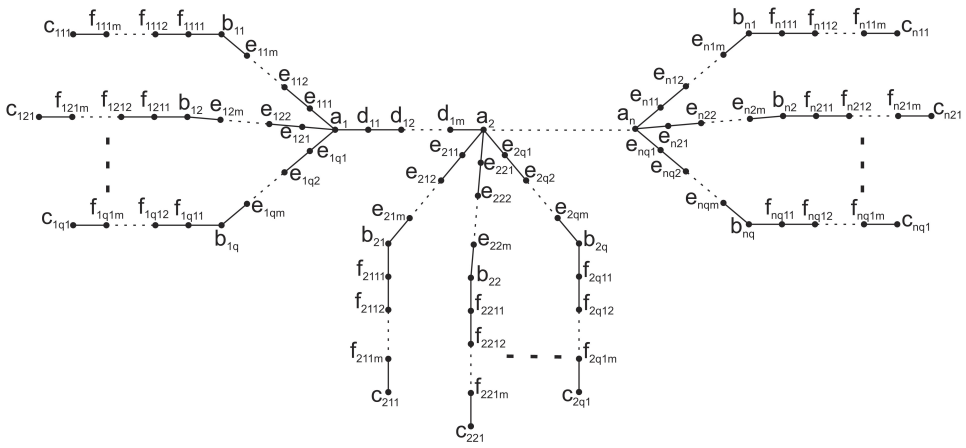
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $S \subseteq \beta$. Dapat dilihat bahwa kardinalitas S adalah dua, atau $|S| = 2$. Jika kardinalitas dari himpunan S dikurangi satu, $|S|$ = 2 - 1, himpunan S bukanlah himpunan pemisah minimum. Karena jika $|S| = 1$, maka berdasarkan Teorema 2.2.1 graf tersebut adalah graf lintasan. Jadi, mestilah himpunan S dengan $|S| \leq |\beta| = 2$ adalah himpunan pemisah minimum (β). Dengan demikian diperoleh bahwa

$$2 \leq \dim(R_n(1;1)m) \tag{3.2}$$

Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh $\dim(R_n(1;1)m) = 2$. □

3.2. *Dimensi Metrik Graf $R_n(q;1)m$ untuk $n \geq 2$ dan $q \geq 2$*

Graf $R_n(q;1)m$ untuk $n \geq 2$, $q \geq 2$ dibentuk dengan subdivisi pada graf Lobster $L_n(q;1)$ dengan $n \geq 2$, $q \geq 2$ dengan menyisipkan m titik pada setiap sisi pada graf Lobster $L_n(q;1)$, dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf R_n(q;1)m

Selanjutnya diberikan teorema yang menunjukkan dimensi metrik pada graf $R_n(q;1)$ untuk $n \geq 2$, $q \geq 2$.

Teorema 3.2. *Misalkan terdapat graf $R_n(q;1)$ untuk $n \geq 2$, $q \geq 2$. Maka* $\dim(R_n(q;1)m) = n(q-1)$, *untuk $n \geq 2$, $q \geq 2$*

Bukti. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan himpunan

$$S = \{c_{111}, c_{121}, \cdots, c_{1(q-1)1}, c_{211}, c_{221}, \cdots, c_{2(q-1)1}, \cdots, c_{n11}, c_{n21}, \cdots, c_{n(q-1)}\}$$

pada graf $R_n(q;1)m$. Akan dilihat jarak setiap titik pada graf $R_n(q;1)m$ terhadap himpunan S.
Terlebih dahulu, diberikan definisi representasi suatu titik $v \in V(R_n(q;1))$.

$$\begin{aligned} r(v|S) = (&d(v,c_{111}), d(v,c_{121}), \cdots, d(v,c_{1(q-1)1}), d(v,c_{211}), d(v,c_{221}), \cdots, d(v,c_{2(q-1)1}), \\ &\cdots, d(v,c_{n11}), d(v,c_{n21}), \cdots, d(v,c_{n(q-1)1})). \end{aligned}$$

Karena

(i) $d(a_i, c_{(i\pm x)y1}) = (x+2)(m+1)$, untuk $i = 1,2,\cdots,n$, $y = 1,2,\cdots,q-1$,
(ii) $d(b_{ij}, c_{(i\pm x)y1}) = (x+3)(m+1)$, untuk $i = 1,2,\cdots,n$, $y = 1,2,\cdots,q-1$, $j = 1,2,\cdots,q$ dan $d(b_{ij}, c_{ij1}) = (m+1)$,
(iii) $d(c_{ij1}, c_{(i\pm x)y1}) = (x+4)(m+1)$, untuk $i = 1,2,\cdots,n$, $y = 1,2,\cdots,q-1$, $j = 1,2,\cdots,q$, dan $d(c_{ij1}, c_{ij1}) = 0$,

akibatnya, representasi suatu titik $v \in V(R_n(q;1)m)$ terhadap himpunan S akan menghasilkan representasi yang berbeda. Hal ini juga berlaku terhadap titik-titik subdivisinya, karena juga memiliki jarak yang berbeda terhadap anggota himpunan pemisah. Sehingga, diperoleh sedikitnya $(q-1)$ titik jari di setiap titik tulang belakang merupakan himpunan pemisah. Karena terdapat n titik tulang belakang maka banyak titik jari sebagai anggota himpunan pemisah pada graf $R_n(q;1)m$ tersebut sedikitnya adalah $n(q-1)$. Akibatnya,

$$\dim(R_n(q;1)m) \leq n(q-1) \tag{3.3}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan $S \subseteq \beta$. Andaikan S bukan himpunan bagian dari β. Misalkan $\beta = \{c_{121}, \cdots, c_{1(q-1)1}, c_{211}, c_{221}, \cdots, c_{2(q-1)1}, c_{n11}, c_{n21}, \cdots, c_{n(q-1)}\}$. Diperoleh bahwa terdapat titik yang memiliki representasi jarak yang sama, yaitu

$$r(c_{111}|S) = r(c_{1q1}|S)$$

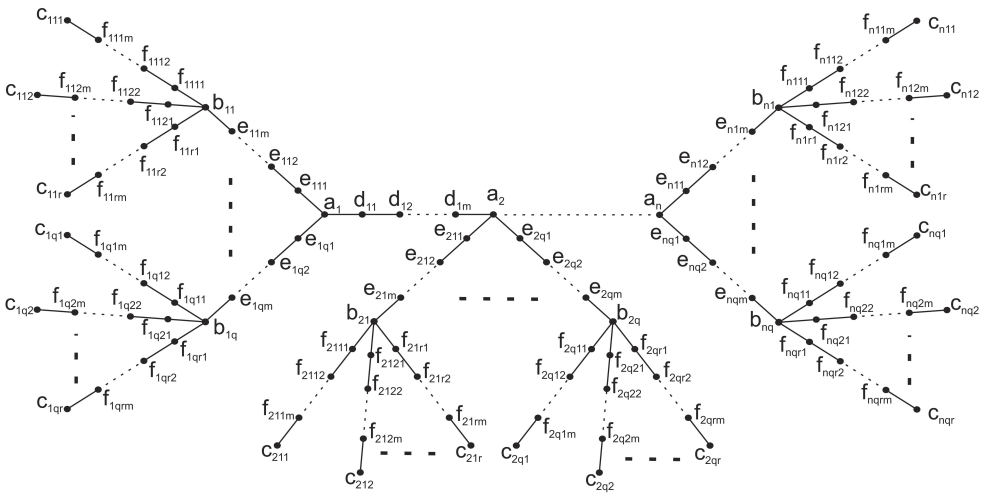
Hal ini berarti β bukan merupakan himpunan pemisah minimum. Akibatnya terjadi kontradiksi, oleh karena itu $c_{111} \in \beta$. Jadi $S \subseteq \beta$, karena $S \subseteq \beta$ maka kardinalitas himpunan S lebih kecil atau sama dengan kardinalitas himpunan β. Akibatnya,

$$n(q-1) \leq \dim(R_n(q;1)m) \tag{3.4}$$

Berdasarkan (3.3) dan (3.4) diperoleh $\dim(R_n(q;1)m) = n(q-1)$. □

3.3. *Dimensi Metrik Graf $R_n(q;r)m$ untuk $n \geq 2$, $q \geq 1$ dan $r \geq 2$*

Graf $R_n(q;r)m$ dengan $n \geq 2$, $q \geq 1$ dan $r \geq 2$ dibentuk dengan subdivisi pada graf Lobster $L_n(q;r)$ dengan $n \geq 2$, $q \geq 1$ dan $r \geq 2$ dengan menyisipkan m titik pada setiap sisi pada graf Lobster $L_n(q;r)$, dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Graf $R_n(q;r)m$

Selanjutnya, diberikan teorema yang menunjukkan dimensi metrik pada graf $R_n(q;r)m$ untuk $n \geq 2$,$q \geq 1$ dan $r \geq 2$.

Teorema 3.3. *Misalkan terdapat graf $R_n(q;r)m$ untuk $n \geq 2$,$q \geq 1$ dan $r \geq 2$. Maka* $\dim(R_n(q;r)m) = nq(r-1)$*, untuk $n \geq 2$,$q \geq 1$ dan $r \geq 2$.*

Bukti. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan himpunan

$$S = \{c_{111}, c_{112}, \cdots, c_{11(r-1)}, \cdots, c_{1q1}, c_{1q2}, \cdots, c_{1q(r-1)}, c_{211}, c_{212}, \cdots$$
$$c_{21(r-1)}, \cdots, c_{2q1}, c_{2q2}, \cdots, c_{2q(r-1)}, \cdots, c_{n11}, c_{n12}, \cdots, c_{n1(r-1)}, \cdots, c_{nq1}, c_{nq2}, \cdots, c_{nq(r-1)}\}$$

pada graf $R_n(q;r)$. Akan dilihat jarak setiap titik pada graf $R_n(q;r)$ terhadap himpunan S.
Terlebih dahulu, diberikan definisi representasi suatu titik $v \in V(R_n(q;r))$.

$$\begin{aligned} r(v|S) = (&d(v,c_{111}), d(v,c_{112}), \cdots, d(v,c_{11(r-1)}), \cdots, d(v,c_{1q1}), d(v,c_{1q2}), \cdots, d(v,c_{1q(r-1)}),\\ &d(v,c_{211}), d(v,c_{212}), \cdots, d(v,c_{21(r-1)}), \cdots, d(v,c_{2q1}), d(v,c_{2q2}), \cdots, d(v,c_{2q(r-1)}), \cdots,\\ &d(v,c_{n11}), d(v,c_{n12}), \cdots, d(v,c_{n1(r-1)}), \cdots, d(v,c_{nq1}), d(v,c_{nq2}), \cdots, d(v,c_{nq(r-1)})) \end{aligned}$$

Karena

(i) $d(a_i, c_{(i\pm x)jz}) = (x+2)(m+1)$, untuk $i = 1,2,\cdots,n$, $j = 1,2,\cdots,q$, $z = 1,2,\cdots,r-1$,
(ii) $d(b_{ij}, c_{(i\pm x)yz}) = (x+3)(m+1)$, untuk $i = 1,2,\cdots,n$, $y = 1,2,\cdots,q$, $j = 1,2,\cdots,q$, $j \neq y$, $z = 1,2,\cdots,r-1$, dan $d(b_{ij}, c_{ijz}) = (m+1)$,
(iii) $d(c_{ijk}, c_{(i\pm x)yz}) = (x+4)(m+1)$, $i = 1,2,\cdots,n$, $y = 1,2,\cdots,q$, $j = 1,2,\cdots,q$, $d(c_{ijk}, c_{ijk}) = 0$, dan $d(c_{ijk}, c_{ijz}) = 2(m+1)$,

Akibatnya, representasi suatu titik $v \in V(R_n(q;r)m)$ terhadap himpunan S akan menghasilkan representasi yang berbeda. Hal ini juga berlaku terhadap titik-titik

subdivisinya, karena juga memiliki jarak yang berbeda terhadap anggota himpunan pemisah. Dari hasil di atas diperoleh setiap titik pada graf $R_n(q;r)m$ memiliki representasi yang berbeda terhadap S. Jadi sedikitnya gabungan (r - 1) titik jari di setiap titik tangan merupakan himpunan pemisah. Karena terdapat q titik tangan maka banyak titik jari sebagai anggota himpunan pemisah pada graf $R_n(q;r)m$ tersebut sedikitnya adalah $nq(r-1)$. Sehingga,

$$\dim(R_n(q;r)m) \leq nq(r-1). \tag{3.5}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan $S \subseteq \beta$. Andaikan S bukan himpunan bagian dari β. Misalkan titik tersebut titik jari c_{111} atau $c_{111} \notin \beta$. Misalkan himpunan

$$\beta = \{c_{111}, c_{112}, \cdots, c_{11(r-1)}, \cdots, c_{1q1}, c_{1q2}, \cdots, c_{1q(r-1)}, c_{211}, c_{212}, \cdots, c_{21(r-1)}, \cdots, c_{2q1}, c_{2q2}, \cdots, c_{2q(r-1)}, c_{n11}, c_{n12}, \cdots, c_{n1(r-1)}, \cdots, c_{nq1}, c_{nq2}, \cdots, c_{nq(r-1)}\}.$$

Diperoleh bahwa terdapat dua titik di $R_n(q;r)m$ memiliki representasi yang sama, yaitu

$$r(c_{111}|\beta) = r(c_{11r}|\beta).$$

Hal ini berarti β bukan merupakan himpunan pemisah minimum. Akibatnya terjadi kontradiksi, oleh karena itu $c_{111} \in \beta$. Jadi $S \subseteq \beta$. karena $S \subseteq \beta$ maka kardinalitas himpunan S lebih kecil atau sama dengan kardinalitas himpunan β. Akibatnya,

$$nq(r-1) \leq \dim(R_n(q;r)m). \tag{3.6}$$

Berdasarkan (3.5) dan (3.6) diperoleh $\dim(R_n(q;r)m) = nq(r-1)$. □

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah didapatkan, maka $\dim(R_n(1;1)m)$ untuk $n > 2$ adalah 2. Selanjutnya, $\dim(R_n(q;1)m)$ untuk $n \geq 2$, $q \geq 2$ adalah $n(q-1)$. Selanjutnya, $\dim(R_n(q;r)m)$ dengan $n \geq 2$, $q \geq 1$ dan $r \geq 2$ adalah $nq(r-1)$.

Daftar Pustaka

[1] Chartrand, Eroh, Johnson and Oellerman. 2000. Resolvability in Graph and The Metric Dimension of A Graph. *Discrete Applied Mathematics.* **105**: 99 – 113

[2] Gumilar, P.G.D. 2013. Dimensi Metrik pada Graf Lobster $L_n(q;r)$. *E-Jurnal Matematika* **2**(2): 43 – 48

[3] H. Rosen, K. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications.* Seventh Edition. New York : The McGraw-Hill Companies, Inc