UKURAN ENTROPI BARU PADA HIMPUNAN KABUR INTUISIONISTIK BERNILAI INTERVAL

REZKY ATHARI NOVRITA, NOVA NOLIZA BAKAR

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email: Rezkyathari@yahoo.co.id*

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Dalam kehidupan nyata banyak sekali kasus yang mengandung unsur ketidakpastian atau ketidakjelasan. Oleh karena itu, masalah ketidakpastian ini dapat diselesaikan dengan teori himpunan kabur (*fuzzy set/FS*). Teori himpunan kabur telah diperkenalkan oleh Dr. L.A Zadeh pada tahun 1965, kemudian beberapa bentuk umum telah diusulkan dan dipelajari untuk mengatasi ketidakjelasan. Atanassov mengusulkan konsep himpunan kabur intuisionistik (*intuitionistic fuzzy set/IFS*) dan himpunan kabur intuisionistik bernilai interval (*interval value intuitionistic fuzzy set/IVIFS*) sebagai dua topik penting dalam teori himpunan kabur. Salah satu topik kajian di himpunan kabur adalah ukuran entropi. Entropi dari himpunan kabur menggambarkan tingkat ke-kaburan atau ketidakjelasan dari himpunan kabur. Pada tulisan ini akan diusulkan ukuran entropi baru untuk himpunan kabur intuisionistik bernilai interval, serta bagaimana perbedaan antara ukuran entropi baru tersebut dengan beberapa ukuran entropi *IVIFS* yang pernah diusulkan sebelumnya.

Kata Kunci: Himpunan kabur, Himpunan kabur intuisionistik, Himpunan kabur bernilai interval, Himpunan kabur intuisionistik bernilai interval, Ukuran entropi

1. Pendahuluan

Salah satu topik kajian di himpunan kabur adalah ukuran entropi pada himpunan kabur intuisionistik bernilai interval. Ukuran entropi pada himpunan kabur intuisionistik bernilai interval (*IVIFS*) digunakan untuk menggambarkan tingkat ke-kaburan dari suatu *IVIFS*.

Untuk pengukuran entropi *IVIFS*, Vlachos dan Sergiadis [7] mengungkapkan hubungan intuitif dan matematis antara gagasan entropi untuk *FS* dan *IFS* dalam hal ketidakjelasan dan intuisi. Mereka menunjukkan bahwa entropi untuk *FS* memang merupakan ukuran ketidakjelasan, sedangkan untuk *IFS*, entropi dapat mengukur ketidakjelasan dan intuisi. Ketidakjelasan didominasi oleh selisih antara derajat keanggotaan dan derajat ketidakanggotaan, dan intuisi didominasi oleh derajat keragu-raguan. Oleh karena itu, pada penelitian kali ini akan diperluas konsep ukuran entropi *IFS* pada *IVIFS* dengan mendefinisikan sebuah fungsi bernilai riil pada koleksi dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval sedemikian

sehingga fungsi tersebut merupakan suatu ukuran entropi baru untuk *IVIFS*, serta bagaimana perbedaan antara ukuran entropi baru untuk *IVIFS* tersebut dengan ukuran entropi yang didefinisikan oleh Ye [10].

2. Landasan Teori

Misalkan X adalah suatu himpunan semesta.

2.1. Himpunan Kabur Intuitionistik

Definisi 2.1. [1] Suatu himpunan kabur intuitionistik (*IFS*) A atas X didefinisikan sebagai

$$A = \{(x, u_A(x), v_A(x)) | x \in X\}, \quad (2.1)$$

dimana $u_A : X \rightarrow [0, 1]$ dan $v_A : X \rightarrow [0, 1]$, sehingga $u_A(x)$ disebut derajat keanggotaan atas $x \in X$ pada himpunan A dan $v_A(x)$ disebut derajat ketidakanggotaan atas $x \in X$ pada himpunan A , dan untuk setiap $x \in X$ harus memenuhi $0 \leq u_A(x) + v_A(x) \leq 1$.

Selanjutnya Atanassov [1] juga menjelaskan bahwa jika dimisalkan

$$\pi_A(x) = 1 - u_A(x) - v_A(x), \quad (2.2)$$

maka $\pi_A(x)$ disebut derajat keragu-raguan keanggotaan atas $x \in X$ pada himpunan kabur intuitionistik A .

Definisi 2.2. [1] Untuk dua *IFS* $A = \{(x, u_A(x), v_A(x)) | x \in X\}$ dan $B = \{(x, u_B(x), v_B(x)) | x \in X\}$, didefinisikan hubungan dan operasinya sebagai berikut:

- (1) $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $u_A(x) \leq u_B(x)$ dan $v_A(x) \geq v_B(x)$, untuk setiap $x \in X$;
- (2) $A=B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$, artinya $A=B$ jika dan hanya jika $u_A(x) = u_B(x)$ dan $v_A(x) = v_B(x)$;
- (3) $A^c = \{(x, v_A(x), u_A(x)) | x \in X\}$;
- (4) $A \cap B = \{(x, \min\{u_A(x), u_B(x)\}, \max\{v_A(x), v_B(x)\}) | x \in X\}$;
- (5) $A \cup B = \{(x, \max\{u_A(x), u_B(x)\}, \min\{v_A(x), v_B(x)\}) | x \in X\}$.

2.2. Himpunan Kabur Intuitionistik Bernilai Interval

Definisi 2.3. Misalkan $\text{int}(0, 1)$ adalah himpunan dari semua subinterval tertutup dari interval $[0, 1]$. Suatu himpunan kabur intuitionistik bernilai interval (*IVIFS*) A atas X didefinisikan sebagai

$$A = \{(x, u_A(x), v_A(x)) | x \in X\},$$

dimana $u_A : X \rightarrow \text{int}(0, 1)$ dan $v_A : X \rightarrow \text{int}(0, 1)$, sehingga $u_A(x)$ disebut derajat keanggotaan atas $x \in X$ pada himpunan A dan $v_A(x)$ disebut derajat ketidakanggotaan atas $x \in X$ pada himpunan A , dan untuk setiap $x \in X$ harus memenuhi $0 \leq \sup(u_A(x)) + \sup(v_A(x)) \leq 1$.

Jika dimisalkan $u_A(x) = [u_A^-(x), u_A^+(x)]$ dan $v_A(x) = [v_A^-(x), v_A^+(x)]$, dengan $u_A^-(x)$ dan $u_A^+(x)$ masing-masing menyatakan infimum dan supremum dari $u_A(x)$, begitu juga dengan $v_A^-(x)$ dan $v_A^+(x)$, masing-masing menunjukkan infimum dan supremum dari $v_A(x)$, sehingga

$$A = \{(x, [u_A^-(x), u_A^+(x)], [v_A^-(x), v_A^+(x)]) \mid x \in X\}. \quad (2.3)$$

Selanjutnya jika dimisalkan

$$\begin{aligned} \pi_A(x) &= [\pi_A^-(x), \pi_A^+(x)], \\ &= [1 - u_A^+(x) - u_A^-(x), 1 - v_A^-(x) - v_A^+(x)], \end{aligned}$$

maka $\pi_A(x)$ disebut derajat keragu-raguan keanggotaan atas $x \in X$ pada himpunan kabur intuisisionistik bernilai interval A .

Definisi 2.4. [2] Misalkan $IVIFS(X)$ adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisisionistik bernilai interval atas X . Untuk suatu $A, B \in IVIFS(X)$, dengan $A = \{(x, [u_A^-(x), u_A^+(x)], [v_A^-(x), v_A^+(x)]) \mid x \in X\}$ dan $B = \{(x, [u_B^-(x), u_B^+(x)], [v_B^-(x), v_B^+(x)]) \mid x \in X\}$, didefinisikan hubungan dan operasinya sebagai berikut.

- (1) $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $[u_A^-(x), u_A^+(x)] \leq [u_B^-(x), u_B^+(x)]$ dan $[v_A^-(x), v_A^+(x)] \geq [v_B^-(x), v_B^+(x)]$, untuk setiap $x \in X$;
- (2) $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$, artinya $A = B$ jika dan hanya jika $u_A^-(x) = u_B^-(x)$, $u_A^+(x) = u_B^+(x)$ dan $v_A^-(x) = v_B^-(x)$, $v_A^+(x) = v_B^+(x)$;
- (3) $A^c = \{(x, [v_A^-(x), v_A^+(x)], [u_A^-(x), u_A^+(x)]) \mid x \in X\}$;
- (4) $A \cap B = \{(x, [\min\{u_A^-(x), u_B^-(x)\}, \min\{u_A^+(x), u_B^+(x)\}], [\max\{v_A^-(x), v_B^-(x)\}, \max\{v_A^+(x), v_B^+(x)\}]) \mid x \in X\}$;
- (5) $A \cup B = \{(x, [\max\{u_A^-(x), u_B^-(x)\}, \max\{u_A^+(x), u_B^+(x)\}], [\min\{v_A^-(x), v_B^-(x)\}, \min\{v_A^+(x), v_B^+(x)\}]) \mid x \in X\}$.

Definisi 2.5. [3] Misalkan $int(0, 1)$ menunjukkan himpunan dari semua subinterval tertutup dari interval $[0, 1]$. Untuk $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in int(0, 1)$, didefinisikan sebagai berikut.

- (1) $[a_1, b_1] \leq [a_2, b_2]$ jika dan hanya jika $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$;
- (2) $[a_1, b_1] \preceq [a_2, b_2]$ jika dan hanya jika $a_1 \leq a_2$, $b_1 \geq b_2$;
- (3) $[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$ jika dan hanya jika $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Definisi 2.6. [9] Misalkan $a = [a^-, a^+]$ dan $b = [b^-, b^+]$, maka nilai kemungkinan dari $a \geq b$ didefinisikan sebagai:

$$p(a \geq b) = \max \left\{ 1 - \max \left\{ \frac{b^+ - a^-}{l_a + l_b}, 0 \right\}, 0 \right\}, \quad (2.4)$$

dimana $l_a = a^+ - a^-$ dan $l_b = b^+ - b^-$.

Dengan cara yang sama, nilai kemungkinan dari $b \geq a$ didefinisikan sebagai:

$$p(b \geq a) = \max \left\{ 1 - \max \left\{ \frac{a^+ - b^-}{l_a + l_b}, 0 \right\}, 0 \right\}. \quad (2.5)$$

Definisi di atas digunakan untuk membandingkan dua bilangan interval dan untuk menentukan peringkatnya.

2.3. Ukuran Entropi Himpunan Kabur Intuisionistik

Menurut De Luca dan Termini [5] ukuran tingkat ketidakjelasan atau kekaburan disebut ukuran entropi.

Definisi 2.7. [6] Misalkan $IFS(X)$ adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisionistik atas X , dan $A = \{(x, u_A(x), v_A(x)) | x \in X\}$ adalah suatu himpunan kabur intuisionistik atas X . Sebuah fungsi $E : IFS(X) \rightarrow [0, 1]$ disebut ukuran entropi pada $IFS(X)$, jika E memenuhi sifat berikut:

- (1) $E(A) = 0$ jika dan hanya jika A adalah suatu himpunan tegas (crisp set);
- (2) $E(A) = 1$ jika dan hanya jika $u_A(x) = v_A(x)$, untuk setiap $x \in X$;
- (3) $E(A) = E(A^c)$ (A^c adalah komplemen dari A);
- (4) $E(A) \leq E(B)$ (A lebih tegas atau kurang kabur dari B) jika $u_A(x) \geq u_B(x)$ dan $v_B(x) \geq v_A(x)$ untuk $u_B(x) \geq v_B(x)$ atau $u_A(x) \leq u_B(x)$ dan $v_B(x) \leq v_A(x)$ untuk $u_B(x) \leq v_B(x)$, untuk setiap $x \in X$.

3. Pembahasan

Sebelumnya, diasumsikan bahwa X adalah suatu himpunan berhingga, dengan $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ dan n adalah banyaknya elemen pada X . Himpunan $IVIFS(X)$ adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval atas X .

3.1. Sebuah Ukuran Entropi Baru Pada $IVIFS$

Wei dan Zhang [8] memperluas aksioma dari Szmidt dan Kacprzyk [6] untuk ukuran entropi $IVIFS$ dengan mendefinisikan suatu ukuran entropi baru yang dinotasikan dengan $E(A)$ [8] untuk $IVIFS$.

Definisi 3.1. [4] Suatu $IVIFS(X)$ adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval atas X dan $A \in IVIFS(X)$. Sebuah fungsi bernilai riil $E: IVIFS(X) \rightarrow [0, 1]$ disebut ukuran entropi pada suatu $IVIFS(X)$, jika E memenuhi syarat berikut:

- (1) $E(A) = 0$ jika dan hanya jika A adalah suatu himpunan tegas (crisp set), yaitu $u_A^-(x_i) = u_A^+(x_i) = 1$ dan $v_A^-(x_i) = v_A^+(x_i) = 0$ atau $u_A^-(x_i) = u_A^+(x_i) = 0$ dan $v_A^-(x_i) = v_A^+(x_i) = 1$ untuk setiap $x_i \in X$;
- (2) $E(A) = 1$ jika dan hanya jika $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]$, untuk setiap $x_i \in X$;
- (3) $E(A) = E(A^c)$ (A^c adalah komplemen dari A);
- (4) $E(A) \leq E(B)$ (A lebih tegas atau kurang kabur dari B) jika:
 $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] \leq [u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)]$ dan $[v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)] \geq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$
 untuk $[u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)] \leq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$
 atau
 $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] \geq [u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)]$ dan $[v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)] \leq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$
 untuk $[u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)] \geq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$
 atau

$[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] \preceq [u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)]$ dan $[v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)] \succeq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$
 untuk $[u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)] \preceq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$
 atau
 $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] \succeq [u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)]$ dan $[v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)] \preceq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$
 untuk $[u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)] \succeq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$
 untuk setiap $x_i \in X$.

Teorema 3.2. [8] Himpunan $IVIFS(X)$ adalah himpunan dari semua himpunan kabur intui-sionistik bernilai interval atas X , dan $A \in IVIFS(X)$. Sebuah fungsi $E(A)$ yang didefinisikan sebagai

$$E(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \pi \quad (3.1)$$

adalah suatu ukuran entropi untuk $IVIFS$.

Teorema 3.3. [8] Fungsi genap $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ monoton turun pada $[0, 1]$, $f(-1) = f(1) = 0$, $f(0) = 1$, dan $A \in IVIFS(X)$. Sebuah fungsi $E_f(A)$ yang didefinisikan sebagai,

$$E_f(A) = \frac{1}{n} \sum_i^n f \left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \right) \quad (3.2)$$

adalah suatu ukuran entropi untuk $IVIFS$.

3.2. Perbandingan Beberapa Ukuran Entropi

Untuk $A \in IVIFS(X)$, Ye [10] mengusulkan dua ukuran entropi $L_1(A)$ dan $L_2(A)$ yaitu:

$$\begin{aligned}
 L_1(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n & \left(\left[\sin \frac{1 + u_A^-(x_i) + pW_u(x_i) - v_A^-(x_i) - qW_v(x_i)}{4} \pi \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \frac{1 - u_A^-(x_i) - pW_u(x_i) + v_A^-(x_i) + qW_v(x_i)}{4} \pi - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right) \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_2(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n & \left(\left[\cos \frac{1 + u_A^-(x_i) + pW_u(x_i) - v_A^-(x_i) - qW_v(x_i)}{4} \pi \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos \frac{1 - u_A^-(x_i) - pW_u(x_i) + v_A^-(x_i) + qW_v(x_i)}{4} \pi - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right)
 \end{aligned}$$

dimana $W_u(x_i) = u_A^+(x_i) - u_A^-(x_i)$, $W_v(x_i) = v_A^+(x_i) - v_A^-(x_i)$ dan untuk suatu $p, q \in [0, 1]$.

Teorema berikut menunjukkan persamaan (3.3) dan persamaan (3.4) adalah sama.

Teorema 3.4. [8] Himpunan $IVIFS(X)$ adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisisionistik bernilai interval atas X . Untuk suatu $A \in IVIFS(X)$, misalkan

$$L(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\left[\sqrt{2} \cos \frac{u_A^-(x_i) + pW_u(x_i) - v_A^-(x_i) - qW_v(x_i)}{4} \pi - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right) \quad (3.4)$$

dimana $W_u(x_i) = u_A^+(x_i) - u_A^-(x_i)$, $W_v(x_i) = v_A^+(x_i) - v_A^-(x_i)$ dan untuk suatu $p, q \in [0, 1]$. Maka $L_1(A) = L_2(A) = L(A)$.

4. Kesimpulan

Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa :

- (1) Ukuran entropi pada himpunan kabur intuisisionistik bernilai interval adalah suatu ukuran untuk mengukur tingkat kekaburan atau tingkat ketidakjelasan dari suatu himpunan kabur intuisisionistik bernilai interval.
- (2) Misalkan suatu $IVIFS A = \{(x_i, [u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)], [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]) | x_i \in X\}$ dan terbukti bahwa suatu ukuran entropi baru untuk $IVIFS$ adalah

$$E(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \pi.$$
- (3) Ukuran entropi $E(A)$ lebih efektif dan logis untuk mengukur tingkat kekaburan atau ketidakjelasan dari himpunan kabur intuisisionistik bernilai interval ($IVIFS$) dibandingkan dengan ukuran entropi yang yang diperkenalkan oleh Ye [?].

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof Dr. I Made Arnawa, Bapak Dr. Jenizon, dan Ibu Monika Rianti Helmi, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Atanassov, K.T. 1986. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **20**: 87 – 96
- [2] Atanassov, K. & G. Gargov. 1989. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **31**: 343 – 349
- [3] Burillo, P. & H. Bustince. 1996. Entropy on intuitionistik fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **78**:305 – 316
- [4] Liu, X.D., S.H. Zhang, & F.L. Xiong. 2005. Entropy and subethood for general interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*. **181**: 4273 – 4286
- [5] Luca, A. de & S. Termini. 1972. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and Computation*. **20**:301 – 312
- [6] Szmidt, E. & J. Kacprzyk. 2001. Entropy for intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **118**: 467 – 477
- [7] Vlachos, I.K. & G.D. Sergiadis. 2007. Intuitionistic fuzzy information-applications to pattern recognition. *Pattern Recognition Letters*. **28**:197 – 206

- [8] Wei, C.P. & Y.Z. Zhang. 2015. Entropy measures for interval valued intuitionistic fuzzy sets and their application in group decision making. *Information Sciences*. **13**: 1155 – 1168
- [9] Xu, Z. & Da, Q.L. 2002. The uncertain OWA operator. *Int. J. Intell. Syst.* **17**: 569 – 575
- [10] Ye, J. 2010. Multicriteria fuzzy decision-making method using entropy weight-based correlation coefficients of interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Applied Mathematical Modelling*. **34**:3864 – 3870