

EKSISTENSI SOLUSI STASIONER \mathcal{PT} -SYMMETRY MULTI DIMER

MAYA SARI SYAHRUL¹, MAHDHIVAN SYAFWAN², ADMI NAZRA², NURWENI PUTRI²,
DWI SULISTIOWATI¹

¹ Program Studi Matematika Universitas Dharma Andalas, Padang, Indonesia

² Program Studi S1 Matematika FMIPA Universitas Andalas, Padang, Indonesia
email: email: maya@unidha.ac.id

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Pada artikel ini akan dikaji eksistensi solusi stasioner dari sistem \mathcal{PT} -Symmetry Multi Dimer yang terdiri dari kumpulan-kumpulan *dimer* di bawah pengaruh potensial linear. Dengan menggunakan analisis perturbasi, diperoleh bahwa sistem \mathcal{PT} -Symmetry Multi Dimer mempunyai solusi nol dan solusi tak-nol.

Kata Kunci: Metode Perturbasi, \mathcal{PT} -Symmetry, Dimer, Eksistensi Solusi

1. Pendahuluan

Dalam mendeskripsikan dinamika suatu sistem, salah satu postulat pada teori kuantum menyatakan bahwa spektrum energinya, yang direpresentasikan secara matematis oleh nilai eigen dari operator Hamiltonian sistem, mestilah bernilai riil [1]. Namun ternyata sifat Hermitisiti bukanlah satu-satunya syarat bagi sistem Hamiltonian untuk dapat memenuhi postulat tersebut. Pada paper fenomenalnya, Bender dan Boettcher [2] pada tahun 1998 menunjukkan bahwa sistem non-Hermit Hamiltonian ternyata dapat memiliki spektrum energi yang bernilai riil apabila memenuhi sifat *parity-time* (\mathcal{PT}) *symmetry*.

Dalam konteks aplikasi di bidang optik, sistem \mathcal{PT} -symmetry menjelaskan perambatan suatu sinar optik pada dua pandu-gelombang terikat (*two coupled waveguides*), dimana pada pandu-gelombang yang satu sinar optik mengalami *gain* (penguatan), sedangkan pada pandu-gelombang lainnya mengalami *loss* (pelemahan). Masing-masing intensitas dari *gain/loss* memiliki nilai yang setara (lihat referensi [3,4] untuk merujuk beberapa eksperimen terkait). Dua pandu gelombang tersebut dikenal juga dengan istilah *dimer*. Eksistensi dan kestabilan solusi sistem \mathcal{PT} -symmetry *dimer* yang dimodelkan oleh dua persamaan Schrödinger terikat dengan *gain/loss* konstan telah dibahas dalam referensi [5,6] melalui pendekatan numerik. Selanjutnya model serupa dengan penambahan *gain/loss* yang bergantung terhadap waktu secara periodik juga sudah dikaji secara numerik dalam referensi [7]. Di samping itu, \mathcal{PT} -symmetry dari sistem lainnya yang juga telah diteliti antara lain \mathcal{PT} -symmetry dari sistem osilator nonlinier terikat [8] dan \mathcal{PT} -symmetry

dari persamaan Schrödinger nonlinier diskrit dengan koefisien pengikat (*coupling*) yang berganti-ganti [9].

Pada artikel ini, kajian tentang versi linier dari model \mathcal{PT} -symmetry dimer yang dibahas pada referensi [5,6] akan dikembangkan untuk kasus *multi-dimer* di bawah pengaruh potensial linier. Metode yang digunakan adalah metode perturbasi karena solusi yang ingin ditinjau adalah untuk kasus konstanta pengikat yang lemah.

2. Persamaan Model

Pada artikel ini akan ditinjau sistem \mathcal{PT} -symmetry dimer yang diperluas, yaitu terdiri dari kumpulan \mathcal{PT} -symmetry dimer yang terikat oleh suatu pengikat inter dan antar dimer. Sistem ini selanjutnya disebut \mathcal{PT} -symmetry multi-dimer.

Dengan menambahkan potensial linier, model dari \mathcal{PT} -symmetry multi-dimer ini diberikan oleh sistem persamaan

$$\begin{aligned} i\dot{u}_n &= i\gamma u_n + kv_n + 2\alpha nu_n + \epsilon v_{n-1}, \\ i\dot{v}_n &= -i\gamma v_n + ku_n + 2\alpha nv_n + \epsilon u_{n+1}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dimana $u_n \equiv u_n(t)$ dan $v_n \equiv v_n(t)$ adalah fungsi bernilai kompleks yang menyatakan amplitudo gelombang optik yang merambat pada pandu-gelombang yang mengalami *gain* dan *loss* di waktu $t > 0$ dan site $n \in \mathbb{Z}$, ‘dot’ menyatakan turunan pertama terhadap t , $\gamma > 0$ menyatakan konstanta *gain/loss*, α merupakan konstanta potensial linier, sedangkan $k > 0$ dan $\epsilon \geq 0$ berturut-turut merepresentasikan konstanta pengikat inter dan antar dimer. Ilustrasi susunan pandu-gelombang dari \mathcal{PT} -symmetry multi-dimer ini diberikan oleh Gambar 1.

3. Analisis Awal

Untuk mengkonfirmasi sifat \mathcal{PT} -symmetry yang dimiliki oleh sistem (2.1), akan ditunjukkan bahwa sistem tersebut invarian terhadap transformasi berikut:

$$(u_n, v_n, \dot{u}_n, \dot{v}_n, t, i, n) \rightarrow (v_n, u_n, -\dot{v}_n, -\dot{u}_n, -t, -i, -n). \tag{3.1}$$

Dengan mengenakan transformasi (3.1) ke persamaan (2.1), diperoleh

$$\begin{aligned} i\dot{v}_{-n} &= -i\gamma v_{-n} + ku_{-n} + 2\alpha(-n)v_{-n} + \epsilon u_{-n+1}, \\ i\dot{u}_{-n} &= i\gamma u_{-n} + kv_{-n} + 2\alpha(-n)u_{-n} + \epsilon v_{-n-1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dengan memisalkan $n = -m$ pada persamaan (3.2), maka akan dihasilkan kembali persamaan (2.1).

Selanjutnya perhatikan teorema berikut.

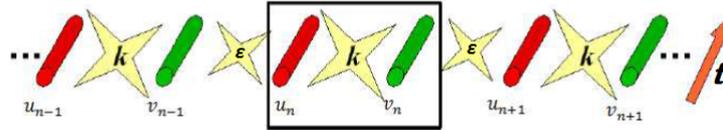
Teorema 3.1. *Sistem (2.1) ekuivalen dengan sistem*

$$\begin{aligned} i\dot{U}_n &= i\tilde{\gamma}U_n + V_n + 2\tilde{\alpha}nU_n + \tilde{\epsilon}V_{n-1}, \\ i\dot{V}_n &= -i\tilde{\gamma}V_n + U_n + 2\tilde{\alpha}nV_n + \tilde{\epsilon}U_{n+1}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

dimana $U_n \equiv U_n(\tau)$, $V_n \equiv V_n(\tau)$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}$, $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{k}$ dan $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{k}$.

Bukti. Misalkan

$$u_n(t) = a_0U_n(\tau) + b_0 \quad \text{dan} \quad v_n(t) = a_0V_n(\tau) + b_0, \tag{3.4}$$



Gambar 1. Ilustrasi \mathcal{PT} -symmetry multi-dimer pada susunan pandu-gelombang. Pandu-gelombang merah dan hijau berturut-turut merepresentasikan dua jenis tipe: (u_n) mengalami gain dan (v_n) mengalami loss. Pandu-gelombang tersebut terikat oleh konstanta pengikat inter k dan konstanta pengikat antar ϵ . Arah perambatan sinar optik dinyatakan oleh tanda panah berwarna merah.

dimana $\tau = a_1 t$ dan $a_0, a_1, b_0 \in \mathbb{R}$, dengan $a_0, a_1 \neq 0$. Untuk menunjukkan persamaan (2.1) ekuivalen dengan (3.3), maka akan ditentukan nilai dari konstanta a_0, a_1 dan b_0 . Untuk melakukannya, substitusikan persamaan (3.4) ke persamaan (2.1), sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} ia_0 a_1 \dot{U}_n &= ia_0 \gamma U_n + a_0 k V_n + 2a_0 \alpha n U_n + a_0 \epsilon V_{n-1} + b_0 (i\gamma + k + 2\alpha n + \epsilon), \\ ia_0 a_1 \dot{V}_n &= -ia_0 \gamma V_n + a_0 k U_n + 2a_0 \alpha n V_n + a_0 \epsilon U_{n+1} + b_0 (-i\gamma + k + 2\alpha n + \epsilon). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dengan melihat hubungan antara persamaan (3.1) dan (3.5), maka diperoleh

$$a_0 = \frac{1}{k}, \quad a_1 = k, \quad b_0 = 0. \quad \square$$

Berdasarkan Teorema 3.1, maka analisis terhadap persamaan (2.1) dapat disederhanakan, tanpa mengurangi keumuman, dengan menetapkan $k = 1$. Dengan demikian, untuk pembahasan selanjutnya akan ditinjau sistem \mathcal{PT} -symmetry multi-dimer berikut:

$$\begin{aligned} i\ddot{u}_n &= i\gamma u_n + v_n + 2\alpha n u_n + \epsilon v_{n-1}, \\ i\ddot{v}_n &= -i\gamma v_n + u_n + 2\alpha n v_n + \epsilon u_{n+1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

4. Analisis Eksistensi Solusi Stasioner

Solusi stasioner (titik tetap) dari sistem \mathcal{PT} -symmetry multi-dimer dapat ditentukan dengan menetapkan u_n dan v_n sebagai fungsi yang tidak bergantung pada waktu t . Hal ini memberikan

$$\begin{aligned} i\gamma u_n + v_n + 2\alpha n u_n + \epsilon v_{n-1} &= 0, \\ -i\gamma v_n + u_n + 2\alpha n v_n + \epsilon u_{n+1} &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Selanjutnya analisis terhadap eksistensi solusi (4.1) akan ditinjau untuk dua kasus berdasarkan nilai konstanta pengikat antar dimer, yaitu kasus $\epsilon = 0$ dan kasus $0 < \epsilon \ll 1$.

4.1. Kasus $\epsilon = 0$

Pada saat tidak ada pengikat antar dimer ($\epsilon = 0$), sistem (4.1) menjadi

$$\begin{aligned} i\gamma u_n + v_n + 2\alpha n u_n &= 0, \\ -i\gamma v_n + u_n + 2\alpha n v_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Lema berikut memberikan kriteria solusi bernilai nol pada sistem (4.2).

Lema 4.1. *Sistem (4.2) mempunyai solusi nol jika dan hanya jika*

$$\gamma \neq \sqrt{1 - 4\alpha^2 n^2}, \quad (4.3)$$

untuk suatu $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ dan setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Bukti. Sistem (4.2) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} i\gamma + 2\alpha n & 1 \\ 1 & -i\gamma + 2\alpha n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Selanjutnya misalkan

$$M = \begin{bmatrix} i\gamma + 2\alpha n & 1 \\ 1 & -i\gamma + 2\alpha n \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Jelas bahwa sistem (4.4) mempunyai solusi trivial (solusi nol) jika dan hanya jika

$$\det(M) = 4\alpha^2 n^2 + \gamma^2 - 1 \neq 0 \quad (4.6)$$

atau

$$\gamma \neq \sqrt{1 - 4\alpha^2 n^2}, \quad (4.7)$$

untuk suatu $\alpha \in \mathbb{R}$ dan setiap $n \in \mathbb{Z}$. \square

Kriteria solusi bernilai tak-nol pada sistem (4.2) diberikan dalam akibat berikut.

Akibat 4.2. *Sistem (4.2) mempunyai solusi tak-nol jika $\alpha = 0$ dan $\gamma = 1$.*

Bukti. Kontraposisi dari Lema 4.1 jelas menunjukkan bahwa sistem (4.2) mempunyai solusi tak-nol jika dan hanya $\gamma = \sqrt{1 - 4\alpha^2 n^2}$ untuk suatu $\alpha \in \mathbb{R}$ atau untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Kita tidak mungkin menetapkan nilai γ sebagai fungsi terhadap $n \in \mathbb{Z}$, karena n merupakan domain dari solusi stasioner. Karena $\gamma > 0$ (ditetapkan sejak awal) dan nilainya bersifat tetap untuk sebarang $n \in \mathbb{Z}$, maka mestilah $\alpha = 0$. \square

Karena $\alpha = 0$, maka pada solusi tak-nol pada sistem (4.2) mestilah $\gamma = 1$. Dengan mengganti nilai $\alpha = 0$ dan $\gamma = 1$ pada persamaan (4.2), diperoleh solusi tak nolnya adalah

$$\begin{aligned} u_n &= c_n, \\ v_n &= ic_n, \end{aligned} \quad (4.8)$$

dengan $c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dapat dipilih sebarang.

4.2. Kasus $0 < \epsilon \ll 1$

Eksistensi solusi stasioner dari sistem (4.1) untuk $0 < \epsilon \ll 1$ akan dianalisis dengan menggunakan metode ekspansi perturbasi. Misalkan solusi asimtotik dari u_n dan v_n terhadap parameter perturbasi ϵ dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} u_n &= u_n^{(0)} + \epsilon u_n^{(1)} + \epsilon^2 u_n^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ v_n &= v_n^{(0)} + \epsilon v_n^{(1)} + \epsilon^2 v_n^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Substitusikan persamaan (4.9) ke persamaan (4.1), kemudian kelompokkan suku-sukunya berdasarkan pangkat ϵ , diperoleh

$$\mathcal{O}(1) : \begin{cases} i\gamma u_n^{(0)} + v_n^{(0)} + 2\alpha n u_n^{(0)} = 0, \\ -i\gamma v_n^{(0)} + u_n^{(0)} + 2\alpha n v_n^{(0)} = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

dan

$$\mathcal{O}(\epsilon^m) : \begin{cases} i\gamma u_n^{(m)} + v_n^{(m)} + 2\alpha n u_n^{(m)} = -v_{n-1}^{(m-1)}, \\ -i\gamma v_n^{(m)} + u_n^{(m)} + 2\alpha n v_n^{(m)} = -u_{n+1}^{(m-1)}, \end{cases} \quad (4.11)$$

untuk $m = 1, 2, \dots$

Perhatikan bahwa persamaan (4.10) serupa dengan persamaan (4.2). Jadi solusi $u_n^{(0)}$ dan $v_n^{(0)}$ dapat dibedakan atas solusi nol dan solusi tak-nol dengan kriteria seperti yang diberikan pada Lema 4.1 dan Akibat 4.2. Adapun solusi tak-nol $u_n^{(0)}$ dan $v_n^{(0)}$ diberikan oleh persamaan (4.8), yaitu

$$\begin{aligned} u_n^{(0)} &= c_n, \\ v_n^{(0)} &= i c_n. \end{aligned} \quad (4.12)$$

dengan $c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dapat dipilih sebarang.

Selanjutnya solusi $u_n^{(m)}$ dan $v_n^{(m)}$, dengan $m = 1, 2, \dots$, dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan (4.11) secara rekursif, yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} u_n^{(m)} &= \frac{(i\gamma - 2\alpha n)v_{n-1}^{(m-1)} + u_{n+1}^{(m-1)}}{4n^2\alpha^2 + \gamma^2 - 1}, \\ v_n^{(m)} &= \frac{-(i\gamma - 2\alpha n)u_{n+1}^{(m-1)} + v_{n-1}^{(m-1)}}{4n^2\alpha^2 + \gamma^2 - 1}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

dengan $4n^2\alpha^2 + \gamma^2 \neq 1$.

Dari persamaan (4.13) diperoleh bahwa solusi nol $u_n^{(0)}$ dan $v_n^{(0)}$ akan menghasilkan solusi nol pula semua $u_n^{(m)}$ dan $v_n^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$. Jadi dapat disimpulkan bahwa pada saat $\epsilon \geq 0$, solusi nol dari sistem (4.1) eksis di setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\gamma > 0$ dengan $\gamma \neq \sqrt{1 - 4\alpha^2 n^2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Solusi tak-nol $u_n^{(m)}$ dan $v_n^{(m)}$, dengan $m = 1, 2, \dots$, tidak dapat ditentukan secara rekursif dari persamaan (4.13) karena solusi tak-nol untuk $u_n^{(0)}$ dan $v_n^{(0)}$ $\epsilon = 0$ hanya dipenuhi untuk $\alpha = 0$ (lihat lagi Akibat 4.2). Namun, berdasarkan teorema alternatif Fredholm, persamaan (4.11) untuk $m = 1$ mempunyai solusi jika berlaku

$$\begin{bmatrix} v_{n-1}^{(0)} \\ u_{n+1}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_n^{(0)} \\ \tilde{v}_n^{(0)} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.14)$$

dimana $\left[\tilde{u}_n^{(0)}, \tilde{v}_n^{(0)}\right]^T$ memenuhi

$$M^* \left[\tilde{u}_n^{(0)}, \tilde{v}_n^{(0)}\right]^T = [0, 0]^T, \quad (4.15)$$

dengan

$$M^* = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Perhatikan bahwa $\left[v_{n-1}^{(0)}, u_{n+1}^{(0)}\right]^T$ dapat diperoleh dari persamaan (4.12), yaitu

$$\begin{bmatrix} v_{n-1}^{(0)} \\ u_{n+1}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ic_{n-1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix}, \quad c_{n-1}, c_{n+1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (4.17)$$

sedangkan solusi tak nol dari sistem (4.15) diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_n^{(0)} \\ \tilde{v}_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_n \\ id_n \end{bmatrix}, \quad d_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (4.18)$$

Dari persamaan (4.17) dan (4.18) didapatkan

$$\begin{bmatrix} v_{n-1}^{(0)} \\ u_{n+1}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_n^{(0)} \\ \tilde{v}_n^{(0)} \end{bmatrix} = -ic_{n-1}d_n + ic_{n+1}d_n \quad (4.19)$$

yang bernilai nol jika $c_{n-1} = -c_{n+1} \neq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya pilih $c_{n-1} = \tilde{c}$.

Dari syarat ini, diperoleh solusi tak-nol

$$\begin{aligned} u_n^{(1)} &= ib_n + \tilde{c}, \\ v_n^{(1)} &= b_n, \end{aligned} \quad (4.20)$$

dengan $b_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dapat dipilih sebarang.

Dengan demikian ekspansi asimtotik untuk solusi tak-nol dari sistem stasioner (4.1) diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ +i\tilde{c} \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} ib_n - \tilde{c} \\ b_n \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.21)$$

dengan $b_n, \tilde{c} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dapat dipilih sebarang. Karena koefisien di depan barisan asimtotik $\{\epsilon^m\}$ bernilai konstanta, maka ekspansi (4.21) dikatakan seragam untuk semua $n \in \mathbb{Z}$.

Hasil-hasil yang dijelaskan di atas dirangkum dalam teorema berikut.

Teorema 4.3. *Pandang sistem stasioner dari \mathcal{PT} -symmetry multi-dimer yang diberikan oleh persamaan (4.1).*

- (i) *Solusi nol dari sistem (4.1) eksis di setiap $\epsilon \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\gamma > 0$ dengan $\gamma \neq \sqrt{1 - 4\alpha^2 n^2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.*
- (ii) *Pada saat $0 < \epsilon \ll 1$, solusi tak-nol dari sistem (4.1) eksis hanya untuk $\alpha = 0$ dan solusi asimtotiknya diberikan oleh persamaan (4.21).*

5. Kesimpulan

Pada artikel ini telah dibahas analisis eksistensi solusi stasioner dari \mathcal{PT} -symmetry multi-dimer yang diberikan oleh persamaan (3.6) Berikut hasil-hasil analisis eksistensi yang diperoleh:

- (i) Solusi stasioner nol dari sistem (3.6) eksis di setiap $\epsilon \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\gamma > 0$ jika dan hanya jika $\gamma \neq \sqrt{1 - 4\alpha^2 n^2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.
- (ii) Pada saat $0 \leq \epsilon \ll 1$, solusi stasioner tak-nol dari sistem (3.6) eksis jika $\alpha = 0$ dan $\gamma = 1$.

Kajian tentang eksistensi solusi dari sistem \mathcal{PT} -symmetry multi-dimer ini dapat diperluas untuk kasus nonlinier dan konfigurasi dimer yang berbeda.

6. Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini didanai dari Hibah Penelitian Universitas Dharma Andalas No. 36/PN/LPPM/DIPA-UNIDHA/VIII/2018.

Daftar Pustaka

- [1] C. M. Bender. 2007. Making sense of non-hermitian hamiltonians. *Rep. Prog. Phys.* 70: 947.
- [2] C. M. Bender dan S. Boettcher. 1998. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry. *Phys. Rev. Lett.* 80: 5243.
- [3] A. Guo, G. J. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G. A. Siviloglou dan D. N. Christodoulides. 2009. Observation of PT-Symmetry Breaking in Complex Optical Potentials. *Phys. Rev. Lett.* 103: 093902.
- [4] C. E. Rüter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev dan D. Kip. 2010. Observation of parity-time symmetry in optics. *Nature Physics* 6: 192.
- [5] J. Pickton dan H. Susanto. 2013. Integrability of PT-symmetric dimers. *Phys. Rev. A* 88: 063840.
- [6] K. Li dan P. G. Kevrekidis. 2011. PT-symmetric oligomers: Analytical solutions, linear stability, and nonlinear dynamics. *Phys. Rev. E* 83: 066608.
- [7] F. Battelli, J. Diblik, M. Fečkan, J. Pickton, M. Pospíšil dan H. Susanto. 2015. Dynamics of generalized PT-symmetric dimers with time-periodic gain-loss. *Nonlinear Dyn.* 81: 353.
- [8] J. Cuevas, P. G. Kevrekidis dan A. Khare. 2013. PT-Symmetric dimer of coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. A* 88: 032108.
- [9] V. V. Konotop, D. E. Pelinovsky dan D. A. Zezyulin. 2012. Discrete solitons in PT-Symmetric lattices. *EPL* 100: 56006.