PENENTUAN BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF THORN DARI GRAF JAHANGIR $Th(J_9, l_1, l_2, \dots, l_9)$

ABDI MUSRA, LYRA YULIANTI, DES WELYYANTI

*Program Studi S1 Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : musraabdi@gmail.com*

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$. Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G . Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i , yang selanjutnya disebut kelas warna ke- i , maka $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna ke- i dari $V(G)$. Kode warna $c_{\Pi(v)}$ dari v adalah k -pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik pada G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi G . Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G , dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Pada tulisan ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf Jahangir J_9 .

Kata Kunci: Graf Jahangir, Bilangan Kromatik Lokasi

1. Pendahuluan

Bilangan kromatik lokasi pada graf pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk (2002). Konsep ini merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf. Penentuan bilangan kromatik lokasi bergantung pada banyaknya warna yang diberikan dan kode warna yang didapatkan. Banyak warna yang harus diberikan adalah banyak warna yang minimum serta kode warna yang didapatkan juga harus berbeda.

Graf Jahangir dengan 9 titik, dinotasikan dengan J_9 adalah graf yang diperoleh dari $W_5 = C_4 + K_1$ dengan cara melakukan subdivisi pada setiap sisi di C_4 . Subdivisi pada sisi uv dari suatu graf G dilakukan dengan mengganti sisi uv dengan sebuah titik w dan sisi uw serta wv .

Misalkan $l_1, l_2, \dots, l_n$ adalah bilangan-bilangan bulat positif dan G adalah suatu graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Graf thorn dari graf G , dengan parameter $l_1, l_2, \dots, l_n$ diperoleh dengan menghubungkan l_i titik baru berderajat 1 ke titik v_i dari graf G dimana $i = 1, 2, \dots, n$. Graf thorn dari graf G dapat dinotasikan dengan $Th(G, l_1, l_2, \dots, l_n)$ [2].

2. Tinjauan Teori

Teorema 2.1. [1] Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) \neq N(v)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dimana $N(u)$ adalah himpunan tetangga dari u dan $N(v)$ adalah himpunan tetangga dari v .

Akibat 2.2. [1] Misalkan G adalah graf terhubung dengan satu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

3. Penentuan Bilangan Kromatik Lokasi Graf $Th(J_9, l_1, l_2, \dots, l_9)$

Graf Jahangir dengan 9 titik, dinotasikan J_9 adalah graf yang diperoleh dari $W_5 = C_4 + K_1$, dengan cara melakukan subdivisi pada setiap sisi di C_4 . Graf thorn dari graf Jahangir J_9 diperoleh dengan cara menambahkan sebanyak l_i daun ke titik x_i di J_9 , untuk $1 \leq i \leq 9$. Maka graf thorn dari graf Jahangir J_9 dapat dinotasikan dengan $Th(J_9, l_1, l_2, \dots, l_9)$.

Misalkan v_i adalah suatu titik pada graf Jahangir J_9 yang bertetangga dengan l_i daun yaitu $l_{i,1}, l_{i,2}, \dots, l_{i,i}$ untuk suatu $i, i = 1, 2, \dots, 9$, dimana $l_i \geq 2$. Jika $l_{i,i}$ dan $l_{i,j}$ adalah dua titik yang berbeda pada daun di titik v_i untuk $i, j \in \{1, 2, \dots, 9\}$ sedemikian sehingga $d(l_{i,i}, w) = d(l_{i,j}, w)$ untuk setiap $w \in V(J_9) - \{l_{i,i}, l_{i,j}\}$, maka $c(l_{i,i}) \neq c(l_{i,j})$. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap titik pada daun di titik v_i mempunyai warna berbeda untuk setiap $l_{i,1}, l_{i,2}, \dots, l_{i,i}$, untuk $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Karena v_i bertetangga dengan semua l_i maka v_i harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun l_i .

Teorema 3.1. Misalkan terdapat graf Jahangir $Th(J_9, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$. Maka $\chi_L(Th(J_9, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)) = 6$.

Bukti. Misalkan terdapat graf $Th(J_9, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$. Berdasarkan Akibat 2.2, $\chi_L(Th(J_9, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)) \geq 4 + 1 = 5$. Akan dilihat semua kemungkinan pewarnaan yang akan terjadi. Misalkan v_i adalah titik pada graf Jahangir J_9 yang bertetangga dengan 4 daun. Jika banyaknya kemungkinan warna yang dapat diberikan pada v_i adalah 5 dan setiap kemungkinan pewarnaan titik v_i juga memiliki 1 kemungkinan untuk pewarnaan daunnya, maka terdapat sebanyak 5 kemungkinan pewarnaan yang dapat dilakukan jika diberikan sebanyak 5 warna. Perhatikan bahwa, banyak titik pada graf Jahangir J_9 tersebut adalah 9 dan banyaknya kemungkinan pewarnaan yang dapat dilakukan pada v_i adalah 5, maka akan terdapat minimal 2 titik yang memiliki kode warna yang sama, sehingga perlu ditambahkan satu warna lagi. Dengan demikian $\chi_L(Th(J_9, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)) \geq 4 + 2 = 6$.

Selanjutnya, lakukan pewarnaan pada setiap titik di graf $Th(J_9, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$ sebagai berikut.

Dari pewarnaan pada Gambar 1, didapatkan kode warna yang berbeda untuk setiap titik yang ada, sehingga $\chi_L(Th(J_9, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)) \leq 6$. Dengan demikian

Gambar 1. (a) Graf $Th(J_9, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$, (b) Kode warna pada setiap titik graf $Th(J_9, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$

diperoleh $\chi_L Th(J_9, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4) = 6$. $\square$

Teorema 3.2. Misalkan terdapat graf Jahangir $Th(J_9, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3)$. Maka $\chi_L(Th(J_9, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3)) = 4$.

Bukti. Misalkan terdapat graf $Th(J_9, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3)$. Berdasarkan Akibat 2.2, $\chi_L Th(J_9, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3) \geq 3 + 1 = 4$. Akan dilihat semua kemungkinan pewarnaan yang akan terjadi. Misalkan v_i adalah titik pada graf Jahangir J_9 . Jika banyaknya kemungkinan warna yang dapat diberikan pada v_i yang bertetangga dengan 3 daun adalah 4 dan setiap kemungkinan pewarnaan titik v_i juga memiliki 1 kemungkinan untuk pewarnaan daunnya, maka terdapat sebanyak 4 kemungkinan pewarnaan yang dapat dilakukan pada v_i yang bertetangga dengan 3 daun. Perhatikan bahwa banyaknya kemungkinan pewarnaan yang dapat dilakukan lebih besar dari banyaknya titik v_i yang bertetangga dengan 3 daun.

Selanjutnya akan dilihat kemungkinan pewarnaan yang dapat dilakukan pada titik v_i yang bertetangga dengan 2 daun. Karena banyaknya kemungkinan warna yang diberikan pada v_i yang bertetangga dengan 2 daun adalah 4, dan setiap kemungkinan tersebut juga memiliki 3 kemungkinan pewarnaan pada daunnya, maka dengan terdapat 12 kemungkinan. Perhatikan bahwa banyaknya kemungkinan pewarnaan yang dapat dilakukan lebih besar dari banyaknya titik v_i yang bertetangga dengan 2 daun. Dengan demikian $\chi_L Th(J_9, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3) \geq 4$.

Selanjutnya, lakukan pewarnaan untuk setiap titik pada graf $Th(J_9, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3)$ seperti pada Gambar 2.

Dari pewarnaan pada Gambar 2 didapatkan kode warna yang berbeda untuk setiap titik yang ada, sehingga $\chi_L(Th(J_9, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3)) \leq 4$. Dengan demikian diperoleh $\chi_L(Th(J_9, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3)) = 4$. $\square$

Gambar 2. (a) Graf $Th(J_9, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3)$, (b) Kode warna pada setiap titik graf $Th(J_9, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3)$

4. Kesimpulan

Graf thorn dari graf Jahangir, yang dinotasikan dengan $Th(J_9, l_1, l_2, \dots, l_9)$ diperoleh dengan menghubungkan l_i titik baru berderajat satu ke setiap titik v_i dari graf Jahangir J_9 . Pada makalah ini didapatkan $\chi_L(Th(J_9, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)) = 6$ dan $\chi_L(Th(J_9, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3)) = 4$.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Narwen, M.Si, bapak Dr. Admi Nazra, dan ibu Dr. Arrival Rince Putri yang telah memberikan kritik dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G., 2002. The Locating Chromatic Number of a Graph. *Bull.Inst. Combin.Appl.* **133**: 85 – 89
- [2] Liu, Y., Z. Wang. 2014. Rainbow Connection Number of the Thorn Graphs. *Applied Mathematical Sciences.* **13**: 90 – 99