GRAF RAMSEY MINIMAL UNTUK PASANGAN GABUNGAN GRAF LENGKAP K_2 DAN GABUNGAN GRAF BINTANG $K_{1,n}$

MAYA NABILA, LYRA YULIANTI, MAHDHIVAN SYAFWAN

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : mayanbila@gmail.com*

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Misalkan diberikan graf G dan graf H sebarang. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi di graf F selalu menyebabkan subgraf merah yang berbentuk G atau subgraf biru H termuat di dalam graf F . Kemudian, $\forall e \in E(F)$ notasi $F \setminus \{e\} \nrightarrow (G, H)$ menyatakan bahwa terdapat pewarnaan terhadap sisi-sisi $F \setminus \{e\}$ sehingga graf tersebut tidak memuat G merah dan H biru. Kelas $\mathcal{R}(G, H)$ menyatakan himpunan graf yang memenuhi syarat $F \rightarrow (G, H)$ dan $\forall e \in F$, $F \setminus \{e\} \nrightarrow (G, H)$. Dalam artikel ini akan dibahas graf yang termasuk ke dalam kelas $\mathcal{R}(G, H)$ dimana graf $G \simeq 3K_2$ dan graf $H \simeq 2K_{1,4}$.

Kata Kunci: Graf bintang, Graf lengkap, Graf Ramsey Minimal

1. Pendahuluan

Graf adalah pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Titik menggambarkan suatu objek dan sisi adalah penghubung antara satu objek dengan objek lainnya, sehingga membentuk suatu pola. Beberapa jenis graf diantaranya adalah graf lengkap, graf lintasan, graf siklus, dan graf bintang. Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, teori graf juga mengalami perkembangan, salah satunya adalah kajian tentang Graf Ramsey Minimal. Menurut Burr dkk [2], graf Ramsey (G, H) -minimal didefinisikan sebagai berikut. Misalkan terdapat graf G dan H . Suatu graf F dikatakan sebagai graf Ramsey (G, H) -minimal apabila (1) Untuk sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F , akan selalu terdapat graf G merah atau graf H biru. (2) Jika salah satu sisi sebarang di graf F dihapus, namakan sisi e , kemudian dinotasikan graf baru dengan $F \setminus \{e\}$, maka terdapat pewarnaan terhadap sisi-sisi di graf F sehingga graf $F \setminus \{e\}$ tidak memuat graf G merah dan graf H biru. Untuk suatu graf G dan H tertentu, jika graf F memenuhi dua syarat di atas maka graf F termasuk ke dalam kelas Ramsey minimal untuk pasangan graf G dan H , dinotasikan dengan $\mathcal{R}(G, H)$. Pada penulisan makalah ini, warna merah dinyatakan dengan garis putus-putus dan warna biru dinyatakan dengan garis tidak putus-putus.

Pada tahun 2016 Wijaya dan Baskoro menemukan beberapa cara mengkonstruksi graf yang termasuk ke dalam kelas $\mathcal{R}(2K_2, 2H)$, dimana graf H adalah suatu graf siklus, graf lintasan atau graf bintang [3]. Kemudian pada tahun yang sama Wijaya dkk [4] juga melakukan kajian untuk graf yang termasuk ke dalam kelas $\mathcal{R}(mK_2, H)$. Selanjutnya, Wijaya dkk memberikan syarat perlu dan syarat cukup untuk graf yang termasuk ke dalam kelas $\mathcal{R}(mK_2, H)$ untuk sebarang graf H , dimana m adalah bilangan bulat positif.

Pada penelitian ini akan ditentukan graf yang menjadi anggota kelas $\mathcal{R}(3K_2, 2K_{1,4})$, dimana graf $3K_2$ adalah 3 buah graf lengkap K_2 dan graf $2K_{1,4}$ adalah 2 buah graf bintang $K_{1,4}$.

2. Landasan Teori

Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ didefinisikan sebagai pasangan terurut dari himpunan titik dan himpunan sisi, terdiri atas sebuah himpunan tak kosong $V(G)$ yang memuat titik-titik di G dan sebuah himpunan $E(G)$ yang memuat sisi-sisi di G [1].

Suatu **jalan** v_1-v_{l-1} pada graf G adalah suatu barisan $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{l-1}, v_l$ titik dan sisi pada G sehingga $e_i = v_i v_{i+1}$ untuk setiap i , $1 \leq i \leq l-1$. Pada jalan titik dan sisi boleh dilewati lebih dari satu kali. **Lintasan** adalah bentuk khusus dari jalan, dimana titik nya hanya boleh dilewati tepat satu kali. Suatu graf G dikatakan **graf terhubung** apabila untuk sebarang dua titik u dan v di G , terdapat lintasan dari titik u ke titik v . Suatu graf G dikatakan **subgraf** dari graf H apabila $V(G) \subseteq V(H)$ dan $E(G) \subseteq E(H)$.

Derajat suatu titik didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang terkait pada titik tersebut. **Graf lengkap** K_n adalah graf terhubung dengan n titik yang setiap titiknya saling bertetangga, sehingga semua titik dari graf lengkap K_n berderajat $n-1$. **Graf siklus** C_n adalah graf terhubung dengan n titik yang semua titiknya berderajat dua sehingga banyak sisi dari graf siklus C_n adalah sebanyak n sisi. **Graf bintang** $K_{1,n}$ adalah graf terhubung dengan $n+1$ titik dimana satu titik berderajat n dan sebanyak n titik lainnya berderajat satu. Graf Bintang ditunjukkan pada Gambar 1.

Gambar 1. Graf Bintang $K_{1,n}$

Definisi 2.1. [2] *Bilangan Ramsey graf, dinotasikan dengan $R(G, H)$, didefinisikan sebagai banyaknya titik minimal dari graf lengkap K_n yang memenuhi $K_n \rightarrow (G, H)$ dan $K_n \setminus \{e\} \nrightarrow (G, H)$. Bilangan Ramsey sisi, yang dinotasikan dengan $\hat{r}(G, H)$,*

didefinisikan sebagai banyaknya sisi minimal graf F yang memenuhi $F \rightarrow (G, H)$ dan $F \setminus \{e\} \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di graf F .

Berdasarkan Definisi 2.1 dapat disimpulkan bahwa terdapat dua syarat dalam menentukan apakah graf F merupakan graf Ramsey minimal untuk pasangan G dan H , dinotasikan $F \in \mathcal{R}(G, H)$, yaitu dengan cara:

- (1) Akan ditunjukkan graf F memuat graf G merah atau graf H biru, yaitu dengan cara:
 - (a) Akan ditunjukkan graf F memuat subgraf G merah, yaitu dengan cara melakukan pewarnaan merah pada sisi graf F sehingga terbentuk graf G merah.
 - (b) Akan ditunjukkan bahwa jika graf F tidak memuat subgraf G merah maka graf F memuat subgraf H biru, yaitu dengan cara melakukan pewarnaan merah maksimal pada sisi graf F sehingga tidak memuat graf G merah, kemudian dilakukan pewarnaan biru pada sisi graf F yang belum diwarnai merah sehingga ditemukan graf H biru.
- (2) Akan ditunjukkan untuk setiap sisi di graf F , apabila dihapus satu sisi maka graf F tidak akan memuat subgraf G merah dan subgraf H biru, yaitu dengan cara menunjukkan jika satu sisi pada graf F dihapus, namakan graf $F \setminus \{e\}$, kemudian dilakukan pewarnaan merah maksimal pada graf $F \setminus \{e\}$ maka graf G merah dan graf H biru tidak akan termuat di dalam graf $F \setminus \{e\}$, $\forall e \in F \setminus \{e\}$.

Jika kedua syarat di atas terpenuhi maka terbukti bahwa graf F merupakan graf yang termasuk dalam kelas Ramsey minimal $\mathcal{R}(G, H)$.

3. Pembahasan

Graf yang menjadi anggota kelas $\mathcal{R}(G, H)$ adalah graf yang memuat subgraf G merah atau subgraf H biru. Pada makalah ini akan dibahas tentang kelas Ramsey minimal $\mathcal{R}(G, H)$ untuk $G \simeq 3K_2$ dan $H \simeq 2K_{1,4}$, dimana $3K_2$ terdiri dari tiga graf lengkap K_2 dan $2K_{1,4}$ terdiri dari dua graf bintang $K_{1,4}$.

Definisi 3.1. Misal terdapat graf $2K_{1,4}$, dengan $K_{1,4})_1$ menyatakan graf bintang $K_{1,4}$ pertama, sementara $K_{1,4})_2$ menyatakan graf bintang $K_{1,4}$ kedua. Dinotasikan

$$\begin{aligned} V(K_{1,4})_1 &= \{x_1, x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}\}, \\ V(K_{1,4})_2 &= \{y_1, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{1,3}, y_{1,4}\}. \end{aligned}$$

Kemudian titik $x_{1,4}$ diidentifikasi dengan titik $y_{1,4}$, titik baru dinamakan titik c_1 . Graf yang terbentuk dengan cara tersebut dinamakan graf F , lihat Gambar 2. Diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} V(F) &= \{c_1, x_1, x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, y_1, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{1,3}\}, \\ E(F) &= \{c_1x_1, x_1x_{1,1}, x_1x_{1,2}, x_1x_{1,3}, c_1y_1, y_1y_{1,1}, y_1y_{1,2}, y_1y_{1,3}\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, graf $3F$ dikonstruksi dengan cara sebagai berikut.

Gambar 2. Graf F

Definisi 3.2. Misal terdapat graf F sebanyak 3 buah, namakan F_1, F_2, F_3 , dengan himpunan titik

$$V(F_1) = \{c_1, x_1, x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, y_1, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{1,3}\}$$

$$V(F_2) = \{c_2, x_2, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, y_2, y_{2,1}, y_{2,2}, y_{2,3}\}$$

$$V(F_3) = \{c_3, x_3, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, y_3, y_{3,1}, y_{3,2}, y_{3,3}\}$$

Notasikan:

$$V(3F) = \{c_i, x_{i,j}, y_{i,j} \mid i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3\} \quad \text{dan}$$

$$E(3F) = \{c_i x_i, c_i y_i, x_i x_{i,j}, y_i y_{i,j} \mid i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3\}.$$

Gambar graf $3F$ diberikan dalam Gambar 3.

Gambar 3. Graf $3F$

Teorema 3.3. Misalkan terdapat graf $3K_2$ dan graf $2K_{1,3}$, kemudian graf $3F$ adalah graf pada Definisi 3.2. Maka $3F \in \mathcal{R}(3K_2, 2K_{1,4})$.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $3F \rightarrow (3K_2, 2K_{1,4})$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi $3F$. Andaikan terdapat $3K_2$ merah, maka pembuktian selesai. Selanjutnya, misalkan tidak terdapat $3K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut, maka subgraf merahnya berbentuk F , $K_{1,4} \cup P_3$, K_5 dan $2C_3$. Karena graf $5F$ tidak memuat K_5 dan $2C_3$ maka kemungkinan ini diabaikan. Selanjutnya untuk kemungkinan graf F , jika sebarang sisi pada graf $3F$ diwarnai dengan warna merah hingga membentuk graf F merah, maka sisanya graf $2F$ pasti sisi-sisi nya bisa diwarnai $2K_{1,4}$ biru, begitu juga dengan kemungkinan $K_{1,4} \cup P_3$, jika sisi pada graf $3F$ diwarnai merah hingga diperoleh graf $K_{1,4} \cup P_3$ merah, maka sisanya graf $K_{1,4}$ dan F pasti sisi-sisi nya bisa diwarnai biru hingga membentuk $2K_{1,4}$ biru. Jadi, untuk keempat kemungkinan tersebut, selalu diperoleh $2K_{1,4}$ biru. Cara mewarnainya ditunjukkan pada Gambar 4.

Apabila dihapus satu sisi pada graf $3F$ yang menjadikannya graf $3F \setminus \{e\}$, $\forall e \in 3F$. Kemudian sisi-sisi graf $3F \setminus \{e\}$ diwarnai merah hingga diperoleh subgraf $K_{1,4} \cup P_3$ merah, pasti graf $3F \setminus \{e\} \rightarrow (3K_2, 2K_{1,4})$. Dapat dilihat pada Gambar 5. Sehingga diperoleh bahwa $3F \in \mathcal{R}(3K_2, 2K_{1,4})$. $\square$

Gambar 4. Graf $3F \setminus \{e\} \rightarrow (3K_2, 2K_{1,4})$

Gambar 5. Graf $3F \setminus \{e\} \rightarrow (3K_2, 2K_{1,4})$

Teorema 3.4. Misalkan terdapat graf $3K_2$ dan graf $2K_{1,3}$, maka $4K_{1,4} \in \mathcal{R}(3K_2, 2K_{1,4})$.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $4K_{1,4} \rightarrow (3K_2, 2K_{1,4})$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi $4K_{1,4}$. Misalkan tidak terdapat $3K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut, maka subgraf merahnya berbentuk $K_{1,4}$ dan K_5 . Karena graf $4K_{1,4}$ tidak memuat K_5 maka kemungkinan ini diabaikan. Selanjutnya untuk kemungkinan $K_{1,4}$, jika sisi-sisi graf $4K_{1,4}$ diwarnai merah sampai membentuk subgraf $K_{1,4}$ merah, maka sisanya graf $3K_{1,4}$ yang belum diwarnai pasti sisi-sisinya bisa diwarnai biru. Jadi, untuk kedua kemungkinan tersebut, selalu diperoleh $2K_{1,4}$ biru dalam pewarnaan. Cara mewarnainya ditunjukkan pada Gambar 6.

Apabila dihapus satu sisi pada graf $4K_{1,4}$ yang menjadikannya graf $4K_{1,4} \setminus \{e\}$, $\forall e \in 4K_{1,4}$ kemudian sebarang sisi pada $K_{1,4}$ diwarnai merah, maka graf $4K_{1,4} \setminus \{e\} \rightarrow (3K_2, 2K_{1,4})$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 7, maka diperoleh $4K_{1,4} \in \mathcal{R}(3K_2, 2K_{1,4})$. $\square$

4. Kesimpulan

Suatu graf F dikatakan sebagai graf Ramsey minimal apabila:

- (1) $F \rightarrow (G, H)$, berarti graf F memuat graf G merah atau H biru, dan
- (2) $\forall e \in F$, $F \setminus \{e\} \not\rightarrow (G, H)$, berarti apabila dihapus satu sisi sebarang di graf $F \setminus \{e\}$ maka graf tersebut tidak memuat graf G merah dan H biru.

Gambar 6. $4K_{1,4} \rightarrow (3K_2, 2K_{1,4})$

Gambar 7. Graf $4K_{1,4} \setminus \{e\} \nrightarrow (3K_2, 2K_{1,4})$

Dalam makalah ini diperoleh dua graf Ramsey minimal untuk pasangan graf $3K_2$ dan graf $2K_{1,4}$ yaitu graf $4K_{1,4}$ dan graf $3F$, dimana graf F adalah graf pada Gambar 2.

Daftar Pustaka

- [1] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Application*, Edisi pertama, The Macmillan Press LTD, London dan Basingstoke.
- [2] Burr, S. A., Erdos, P., dan Lovasz, L. 1976. On Graph of Ramsey Type, *Ars Combinatoria*, 167 – 190.
- [3] Wijaya, K. , Baskoro, E. T. 2016. On Ramsey $(2K_2, 2H)$ -Minimal Graphs, *Springer India, J. Math*, **186**, 219 – 223
- [4] Wijaya, K., Baskoro, E.T., Assiyatun, H., Suprijanto, D. 2016. On Ramsey (mK_2, H) -Minimal Graphs, *Springer Japan, J.Math*, **33**, 233 – 243