Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **1** Hal. 209 – 214
Edisi Mei 2019
ISSN : 2303–291X

RAINBOW CONNECTION PADA GRAF AMALGAMASI TANGGA SEGITIGA DIPERUMUM HOMOGEN

MUHARDIANSYAH, LYRA YULIANTI, ADMI NAZRA
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : muhardiansyah97@gmail.com

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Untuk graf G terhubung dan tak trivial, dan k suatu bilangan bulat positif, misalkan $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ suatu pewarnaan sisi di G, dimana sisi yang bertetangga boleh diberi warna yang sama. Suatu lintasan di G dikatakan lintasan *rainbow* jika tidak ada dua sisi di lintasan tersebut memiliki warna yang sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* oleh pewarnaan c jika G memuat lintasan *rainbow* $u - v$ untuk setiap titik u dan v di G. Dalam konteks ini, pewarnaan c disebut *rainbow edge coloring.* Jika c adalah *rainbow edge coloring* dengan k warna digunakan, maka c disebut *rainbow k-coloring.* Jika k adalah bilangan bulat positif yang minimum, maka k adalah bilangan *rainbow connection* dari graf G yang dinotasikan dengan $rc(G) = k$. Untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2$, misalkan $\{G_1, G_2, \cdots, G_m\}$ adalah kumpulan hingga dari graf terhubung dan tak trivial, dan $v_{0,i}$ adalah sebuah titik graf G_i untuk $1 \leq i \leq m$. Amalgamasi $G_1, G_2, \cdots, G_m$ yang dinotasikan dengan $Amal\{G_i, v_{0,i}\}_{i=1}^m$ adalah graf yang berasal dari graf $G_1, G_2, \cdots, G_m$ dengan mengidentifikasi titik-titik $v_{0,1}, v_{0,2}, \cdots, v_{0,m}$ sedemikian sehingga $v_{0,1} = v_{0,2} = \cdots = v_{0,m}$ pada graf $Amal\{G_i, v_{0,i}\}_{i=1}^m$. Graf $Amal\{Tr_n, v\}_m$ adalah graf amalgamasi m buah graf Tr_n, untuk $m \geq 2$. Pada makalah ini akan ditentukan bilangan *rainbow connection* pada graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen $Amal\{Tr_4, v\}_m$ untuk $m \geq 2$.

Kata Kunci: *bilangan rainbow connection*, graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen

1. Pendahuluan

Konsep *rainbow conncetion* pada graf diperkenalkan pertama kali oleh Chartrand, dkk [3]. Untuk graf G terhubung dan tak trivial dan k suatu bilangan bulat positif, misalkan $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ suatu pewarnaan sisi di G, dimana sisi yang bertetangga boleh diberi warna yang sama. Suatu lintasan di G dikatakan lintasan *rainbow* jika tidak ada dua sisi di lintasan tersebut memiliki warna yang sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* oleh pewarnaan c jika G memuat lintasan *rainbow* $u-v$ untuk setiap titik u dan v di G. Dalam konteks ini, pewarnaan c disebut *rainbow edge coloring.* Jika c adalah *rainbow edge coloring* dengan k warna digunakan, maka c disebut *rainbow k-coloring.* Jika k adalah bilangan bulat positif yang minimum, maka k adalah bilangan *rainbow connection* dari graf G yang dinotasikan dengan $rc(G) = k$. Jika c pewarnaan sisi G dengan $rc(G)$ warna digunakan, maka c disebut *minimum rainbow coloring.*

Misalkan c suatu pewarnaan *rainbow edge coloring* pada graf terhubung dan tak trivial G. Untuk dua titik u dan v di G, *rainbow geodesic* $u - v$ adalah lintasan *rainbow* dengan panjang $d(u, v)$. Graf G dikatakan *strongly rainbow-connected* jika G memuat suatu lintasan *rainbow geodesic* $u - v$ untuk setiap titik u dan v di G. Dalam konteks ini, pewarnaan c disebut *strong rainbow coloring.* Jika k adalah bilangan bulat positif yang minimum dan c adalah *strong rainbow k-coloring*, maka k adalah bilangan *strong rainbow connection* dari graf G yang dinotasikan dengan $src(G) = k$.

Chartrand, dkk [3] menyatakan bahwa untuk setiap graf G terhubung, tak trivial dan berukuran m, hubungan $diam(G)$, $rc(G)$ dan $src(G)$ dinyatakan dalam pertaksamaan berikut.

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

Chartrand, dkk [3] telah menentukan bilangan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* dari beberapa kelas graf khusus seperti graf pohon, graf lengkap, graf roda, graf bipartit lengkap dan graf multipartit lengkap. Li, dkk [5] telah menentukan bilangan *rainbow connection* pada graf *3-connected.* Sy dkk [6] telah menentukan bilangan *rainbow connection* pada graf *fan* dan graf *sun.* Fitriani, dkk [4] telah menentukan batas-batas bilangan *rainbow connection* pada graf hasil amalgamasi. Yulianti dkk [7] telah melakukan penentuan bilangan *rainbow connection* dari graf tangga segitiga diperumum. Pada makalah ini akan ditentukan bilangan *rainbow connection* pada graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen $Amal\{Tr_n, v\}_m$ untuk $n = 4$ dan $m \geq 2$.

2. Landasan Teori

Definisi 2.1 berikut merupakan definisi graf amalgamasi yang diambil dalam [2].

Definisi 2.1. [2] *Untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2$, misalkan $\{G_1, G_2, \cdots, G_m\}$ adalah kumpulan hingga dari graf terhubung dan tak trivial, dan $v_{0,i}$ adalah sebuah titik graf G_i untuk $1 \leq i \leq m$ yang dinamakan dengan titik terminal. Amalgamasi $G_1, G_2, \cdots, G_m$ yang dinotasikan dengan $Amal\{G_i, v_{0,i}\}_{i=1}^{m}$ adalah graf yang berasal dari graf $G_1, G_2, \cdots, G_m$ dengan mengidentifikasi titik-titik terminal $v_{0,1}, v_{0,2}, \cdots, v_{0,m}$ sedemikian sehingga $v_{0,1} = v_{0,2} = \cdots = v_{0,m}$ pada graf $Amal\{G_i, v_{0,i}\}_{i=1}^{m}$.*

Graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen adalah graf yang diperoleh dari hasil amalgamasi m-buah graf tangga segitiga diperumum yang homogen (setiap m-buah graf tangga segitiga diperumum tersebut berorde dan berukuran sama) dan titik terminal yang diidentifikasi adalah titik yang sama dari m-buah graf tangga segitiga diperumum tersebut.

Definisi 2.2. *Graf tangga segitiga diperumum Tr_n untuk $n \geq 2$ adalah graf dengan himpunan titik*

$$V(Tr_n) = \{v\} \cup \{\ v_{i,j} \mid 1 \leq j \leq n-i+1, 1 \leq i \leq n\}$$

dan himpunan sisi

$$E(Tr_n) = \{vv_{1,j} \mid 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_{i,j}v_{i,j+1} \mid 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-i\} \cup \{v_{i,j}v_{i+1,j} \mid 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq i \leq n-j\} \cup \{v_{i,j}v_{i+1,j-1} \mid 2 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq j-1\}.$$

Yulianti dkk [7] telah memperoleh bilangan *rainbow connection* dari graf tangga segitiga diperumum Tr_n untuk n bilangan bulat positif dengan $n \geq 2$. Diameter dari graf Tr_n adalah n, yang dinotasikan dengan $diam(Tr_n) = n$. Bilangan *rainbow connection* dari graf Tr_n dinyatakan dalam Teorema 2.3 berikut.

Teorema 2.3. [7] *Misalkan Tr_n adalah graf tangga segitiga diperumum dan $n \geq 2$. Maka bilangan rainbow connection untuk graf tangga segitiga yang diperumum Tr_n adalah*

$$rc(Tr_n) = n.$$

Fitriani dkk [4] telah menentukan batas-batas dari bilangan *rainbow connection* pada graf hasil amalgamasi. Batas-batas dari bilangan *rainbow connection* tersebut dinyatakan dalam Teorema 2.4 berikut.

Teorema 2.4. [4] *Untuk $t \in N, t \geq 2$, misalkan $\{G_i \mid i \in \{1, 2, \cdots, t\}\}$ suatu himpunan hingga dari graf-graf dan setiap G_i mempunyai titik terminal v_{0i}. Jika G adalah amalgamasi dari $G_1, G_2, \cdots, G_t$, maka*

$$diam(G) \leq rc(G) \leq \sum_{i=1}^{t} rc(G_i).$$

3. Pembahasan

Untuk $i = 1, 2, \cdots, m$ dan $m \in \mathbb{N}$, graf $Tr_4^{(i)}$ adalah graf tangga segitiga diperumum ke-i, dengan

$$V(Tr_4^{(i)}) = \{v_i\} \cup \{\ v_{i,j,k} \mid 1 \leq j \leq 4, 1 \leq k \leq 5-j\}$$

dan

$$\begin{aligned} E(Tr_4^{(i)}) = \ & \{v_{i,j,k}v_{i,j,k+1} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq k \leq 4-j\} \\ & \cup \{v_{i,j,k}v_{i,j+1,k} \mid 1 \leq k \leq 3, 1 \leq j \leq 4-k\} \\ & \cup \{v_{i,j,k}v_{i,j+1,k-1} \mid 2 \leq k \leq 4, 1 \leq j \leq k-1\}) \\ & \cup \{v_iv_{i,1,k} \mid 1 \leq k \leq 4\}. \end{aligned}$$

Untuk $1 \leq i \leq m$, misalkan graf $Amal\{G_i, v_{0,i}\}_{i=1}^m$ dengan $G_i = Tr_n^{(i)}$ dan $v_{0,i} = v_i$, $v_i \in V(Tr_4^{(i)})$. Dengan mengidentifikasi setiap titik $v_{0,i}$ untuk $1 \leq i \leq m$, maka $v_{0,1} = v_{0,2} = \cdots = v_{0,m}$ pada graf $Amal\{G_i, v_{0,i}\}_{i=1}^m$. Hasil identifikasi titik-titik $v_{0,i}$ $(1 \leq i \leq m)$ adalah sebuah titik baru, kali ini titik baru tersebut dinamakan dengan titik v. Secara sederhana graf $Amal\{G_i, v_{0,i}\}_{i=1}^m$ dengan $G_i = Tr_n^{(i)}$ dan $v_{0,i} = v_i$ dinotasikan dengan $Amal\{Tr_n, v\}_m$. Dengan demikian, untuk $n \geq 2$ dan

$m \geq 2$, graf $Amal\{Tr_n, v\}_m$ adalah graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen dengan himpunan titik

$$V(Amal\{Tr_n, v\}_m) = \{v\} \cup \{v_{i,j,k} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n-j+1\} \tag{3.1}$$

dan himpunan sisi

$$\begin{aligned} E(Amal\{Tr_n, v\}_m) = \; & \{v_{i,j,k}v_{i,j,k+1} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq n-j\} \cup \\ & \{v_{i,j,k}v_{i,j+1,k} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n-1, 1 \leq j \leq n-k\} \cup \\ & \{v_{i,j,k}v_{i,j+1,k-1} \mid 1 \leq i \leq m, 2 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq k-1\} \cup \\ & \{vv_{i,1,k} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Teorema 3.1. *Misalkan $Amal\{Tr_4, v\}_m$ adalah graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen dengan $m \geq 2$. Maka*

$$rc(Amal\{Tr_4, v\}_m) = 8.$$

Bukti. Akan ditunjukkan $rc(Amal\{Tr_4, v\}_m) = 8$, yaitu dengan menunjukkan $rc(Amal\{Tr_4, v\}_m) \geq 8$ dan $rc(Amal\{Tr_4, v\}_m) \leq 8$. Misalkan graf $Amal\{Tr_4, v\}_m$ untuk $m \geq 2$ dengan himpunan titik yang didefinisikan pada persamaan (3.1) dan himpunan sisi yang didefinisikan pada persamaan (3.2). Dapat diamati bahwa $diam(Amal\{Tr_4, v\}_m) = 8$. Dengan demikian, diperoleh $rc(Amal\{Tr_4, v\}_m) \geq diam(Amal\{Tr_4, v\}_m) = 8$. Selanjutnya akan ditunjukkan $rc(Amal\{Tr_4, v\}_m) \leq 8$. Dikonstruksi sebuah pewarnaan sisi $c : E(Amal\{Tr_4, v\}_m) \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ pada $Amal\{Tr_4, v\}_m$ yang didefinisikan sebagai

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = vv_{i,1,1} \\ 2k, & \text{jika } e = vv_{i,1,k}, \text{ untuk } 2 \leq k \leq 4 \\ j+k, & \text{jika } e = v_{i,j,k}v_{i,j,k+1}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq 4-j \text{ dan } 1 \leq j \leq 3 \\ j+2k, & \text{jika } e = v_{i,j,k+1}v_{i,j+1,k}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq 4-j \text{ dan } 1 \leq j \leq 3 \\ k+j, & \text{jika } e = v_{i,j,k}v_{i,j+1,k}, \text{ untuk } 1 \leq j \leq 4-k \text{ dan } 1 \leq k \leq 3 \end{cases}$$

untuk $1 \leq i \leq m$.

Pandang x dan y adalah dua titik sebarang pada graf $Amal\{Tr_4, v\}_m$. Jelas setiap titik x dan y yang bertetangga di $Amal\{Tr_4, v\}_m$ terdapat lintasan *rainbow* $x - y$ di $Amal\{Tr_4, v\}_m$. Misalkan $x = v_{i,p,q}$ atau $x = v$ dan $y = v_{l,r,s}$, untuk suatu $p, q, r, s \in \{1, 2, 3, 4\}$ dan suatu $i, l \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Maka lintasan *rainbow* $x - y$ untuk x dan y yang tidak bertetangga di $Amal\{Tr_4, v\}_m$ ditunjukkan dalam tiga kasus berikut.

Kasus 1. $x = v$ dan $y = v_{l,r,s}$. Terdapat lintasan *rainbow* $x - y$, yaitu $x = v, v_{l,1,r+s-1}, v_{l,2,r+s-2}, v_{l,3,r+s-3}, \cdots, v_{l,r-1,s+1}, v_{l,r,s} = y$.

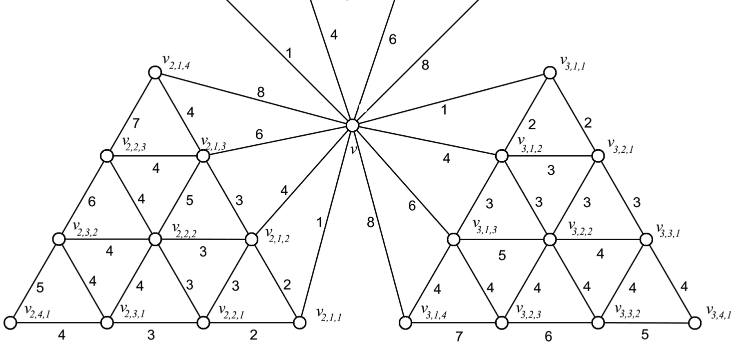
Kasus 2. $x = v_{i,p,q}$ dan $y = v_{l,r,s}$, untuk $i = l$ dan $p \leq r$. Pada kasus ini, dibagi menjadi empat subkasus berikut.

Subkasus 2.1. $p = r$ dan $q < s$. Terdapat lintasan *rainbow* $x - y$, yaitu $x = v_{i,p,q}, v_{i,p,q+1}, v_{i,p,q+2}, \cdots, v_{i,p,s-1}, v_{i,p,s} = y$.

Subkasus 2.2. $p < r$ dan $p + q < r + s$. Terdapat lintasan *rainbow* $x - y$, yaitu $x = v_{i,p,q}, v_{i,p,q+1}, \cdots, v_{i,p,t}, v_{i,p+1,t-1}, v_{i,p+2,t-2}, \cdots, v_{i,r,s} = y$, dimana $t = r + s - p$.
Subkasus 2.3. $p < r$ dan $p + q > r + s$. Terdapat lintasan *rainbow* $x - y$, yaitu $x = v_{i,p,q}, v_{i,p+1,q-1}, \cdots, v_{i,r,h}, v_{i,r,h-1}, v_{i,r,h-2}, \cdots, v_{i,r,s} = y)$, dimana $h = p+q-r$.
Subkasus 2.4. $p + q = r + s$ dan $p < r$. Terdapat lintasan *rainbow* $x - y$, yaitu $x = v_{i,p,q}, v_{i,p+1,q-1}, \cdots, v_{i,r,s} = y$.
Kasus 3. $x = v_{i,p,q}$ dan $y = v_{l,r,s}$ untuk $i \neq l$. Pada kasus ini, dibagi dalam dua subkasus berikut.
Subkasus 3.1. $p + q \leq r + s$. Terdapat lintasan *rainbow* $x - y$, yaitu $x = v_{i,p,q}, v_{i,p,q-1}, \cdots, v_{i,p,1}, v_{i,p-1,1}, v_{i,p-2,1}, \cdots, v_{i,1,1}, v, v_{l,1,4}, v_{l,2,3}, \cdots, v_{l,r,5-r}, v_{l,r,4-r}, v_{l,r,3-r}, \cdots, v_{l,r,s} = y$.
Subkasus 3.2. $p + q > r + s$. Terdapat lintasan *rainbow* $x - y$, yaitu $x = v_{i,p,q}, v_{i,p,q+1}, \cdots, v_{i,p,5-p}, v_{i,p-1,6-p}, \cdots, v_{i,1,4}, v, v_{l,1,1}, v_{l,2,1}, \cdots, v_{l,r,1}, v_{l,r,2}, \cdots, v_{l,r,s} = y$.

Dari ketiga kasus menunjukkan bahwa terdapat lintasan *rainbow* $x - y$ untuk setiap x dan y yang tidak bertetangga di $Amal\{Tr_4, v\}_m$. Jadi, c adalah *rainbow* 8-*coloring*. Karena c adalah *rainbow* 8-*coloring*, ini menunjukkan bahwa $rc(Amal\{Tr_4, v\}_m) \leq 8$. Dengan demikian, $rc(Amal\{Tr_4, v\}_m) = 8$. □

Contoh 3.2. Gambar 1 menunjukkan bahwa graf $Amal\{Tr_4, v\}_3$ adalah graf *rainbow connected* terhadap *Rainbow* 8-*coloring*, dimana $rc(Amal\{Tr_4, v\}_3) = 8$.



Gambar 1. *Rainbow* 8-*coloring* pada graf $Amal\{Tr_4, v\}_3$.

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah diperoleh bilangan *rainbow connection* dari graf amlgamasi tangga segitiga diperumum homogen $Amal\{Tr_4, v\}_m$ untuk $m \geq 2$, yaitu

$$rc(Amal\{Tr_4, v\}_m) = 8.$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Des Welyyanti, Riri Lestari M.Si, dan Dr. Effendi selaku tim penguji dalam penelitian makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J.A. dan U.S.R. Murty. 2000. *Graph Theory with Applications.* Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York City.

[2] Carlson, K. 2006. Generalized Books and C_m-snakes are Prime Graphs, *Ars Combin.* **80**: 215 – 221

[3] Chartrand, G., G. L. Johns, K. A. McKeon, dan P. Zhang. 2006. Rainbow Connection in Graph, *Mathematica Bohemica* **15**: 85 – 89

[4] Fitriani, D. dan A. N. M. Salman. 2016. Rainbow Connection Number of Amalgamation of Some Graphs, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* **13**: 90 – 99).

[5] Li, X., Y. Shi dan Y. Sun. 2010. *Rainbow Connection in 3-connected Graphs*, Arxiv preprint arXiv:1010.6131v1 [math.CO] .

[6] Sy, Syafrizal, G. H. Medika, dan L. Yulianti. 2013. The Rainbow Connection Number of Fan and Sun, *Applied Mathematical Sciences* **7**: 3155 – 3160

[7] Yulianti, L., N. Narwen dan S. Fitrianda. On the Rainbow Connection Number and Strong Rainbow Connection Number of Generalized Triangle Ladder Graph, *submitted.*