Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **1** Hal. 61 – 64
ISSN : 2303–291X


# PELABELAN TOTAL $(a, d)$-TITIK ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF PETERSEN $P(n, 2)$ DENGAN $N$ GANJIL, $N \geq 5$

RIDO AMAN
*Program Studi Matematika,*
*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,*
*Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,*
*Ridho_Aman@yahoo.com*

**Abstrak.** Penelitian ini bertujuan mengkaji kembali tentang pelabelan total $(a, d)$-titik-antiajaib super pada Graf Petersen $P(n, 2)$ dengan $n$ ganjil, $n \geq 5$. Fokus pengkajian diutamakan pada pembentukan pola pelabelan total $(a, d)$-titik-antiajaib super pada Graf Petersen $P(n, 2)$ dengan $n$ ganjil ($n \geq 5$).

*Kata Kunci*: Graf Petersen $P(n, 2)$, pelabelan total $(a, d)$-titik antiajaib super.

## 1. Pendahuluan

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang terkait terhadap titik antara lain graf reguler, yang derajat setiap titiknya sama dan graf irreguler, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama. Salah satu sub kelas graf reguler adalah Graf Petersen diperumum yang merupakan graf reguler yang setiap titiknya berderajat tiga.

Salah satu topik dalam teori graf yang banyak mendapatkan perhatian adalah masalah pelabelan. Masalah ini pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1964), kemudian Stewart (1966), Rosa dan Kotzig (1970). Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan bulat yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan anti ajaib, dikenal dengan pula pelabelan total $(a, d)$-titik-anti ajaib, pelabelan total $(a, d)$-titik ajaib super, pelabelan total $(a, d)$-sisi-anti ajaib dan pelabelan total $(a, d)$-sisi-ajaib super. Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, penyimpanan data komputer, dan desain integrated circuit pada komponen elektronik. Pada makalah ini, penulis melakukan kajian kembali terhadap pelabelan total $(a, d)$-titik-antiajaib super pada salah satu subkelas graf reguler yaitu Graf Petersen yang diperumum.

Graf Petersen adalah graf reguler yang mempunyai derajat titik 3 pada semua titiknya, dan dinotasikan dengan $P(5, 2)$. Graf Petersen diperumum dinyatakan sebagai $P(n, m)$, dengan nilai $n$ menyatakan banyaknya titik luar(sama dengan banyaknya titik dalam) dan nilai $m$ menyatakan lompatan sisi dalam, dimana $n \geq 3 dan 1 \geq m \geq \lfloor \frac{(n-1)}{2} \rfloor$. Graf Petersen diperumum memiliki

$$V(P(n, m)) = \{v_i | i = 0, 1, ..., n-1\} \cup \{u_i | i = 0, 1, ..., n-1\},$$
$$E(P(n, m)) = \{u_i u_(i+1) | i = 0, 1, ..., n-1\} \cup \{u_i v_i | i = 0, 1, ..., n-1\} \cup \{v_i v_(i+m) | i = 0, 1, ..., n-1\}.$$

Dalam hal ini indeks $i$ direduksi ke dalam modulo $n$.

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$. Suatu pemetaan bijeksi $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., p+q\}$ dikatakan pelabelan total $(a, d)$-titik anti ajaib pada graf $G$ jika himpunan bobot titik untuk semua titik di $G$ dapat dinotasikan sebagai $W = \{w(x) | w(x) = f(x) + \sum f(xy), x \in V(G), xy \in E(G)\}$, dapat ditulis dengan sebagai $W = \{a, a+d, a+2d, ..., a+(p-1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

## 2. Pelabelan total $(a, d)$-titik anti ajaib pada Graf Petersen diperumum

**Teorema 2.1.** [1] *Untuk $n$ ganjil $n \geq 5$, Graf Petersen yang diperumum $P(n, 2)$ mempunyai pelabelan total $(\frac{15n+5}{2}, 1)$-titik-anti ajaib super.*

**Bukti.** Misalkan $P(n, 2)$ adalah Graf Petersen dengan $|V[P(n, 2)]| = 2n$ dan $|E[P(n, 2)]| = 3n$. Misalkan didefinisikan pelabelan $h : V[P(n, 2)] \cup E[P(n, 2)] \rightarrow \{1, 2, 3, ..., p+q\}$ sebagai berikut.

$$h(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(8n - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \ (mod\ 2), \\ \frac{1}{2}(7n - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \ (mod\ 2) \end{cases}$$

$$h(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(10n - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \ (mod\ 2), \\ \frac{1}{2}(9n - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \ (mod\ 2) \end{cases}$$

$$h(u_i u_i + 1) = \begin{cases} 2n + 1, & \text{untuk } i = 0, \\ \frac{1}{2}(6n + 2 - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \ (mod\ 2), i \neq 0, \\ \frac{1}{2}(5n + 2 - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \ (mod\ 2) \end{cases}$$

$$h(u_i v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 + i), & \text{untuk } i \equiv 0 (mod\ 2), \\ \frac{1}{2}(n + 2 + i), & \text{untuk } i \equiv 1 (mod\ 2) \end{cases}$$

Pelabelan sisi $v_i v_{i+2}$ untuk $i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, dibagi menjadi dua kasus berikut.

(**Kasus 1**) Jika $n \equiv 1\ (mod\ 4)$, maka sisi $v_iv_{i+2}$ dilabeli sebagai berikut.

$$h(u_iu_i+1) = \begin{cases} n+1, \text{ untuk } i=0, \\ \frac{1}{4}(5n+4-i), \text{ untuk } i \equiv 1\ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}(6n+4-i), \text{ untuk } i \equiv 2\ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}(7n+4-i), \text{ untuk } i \equiv 3\ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}(8n+4-i), \text{ untuk } i \equiv 0\ (mod\ 4), i \neq 0 \end{cases}$$

(**Kasus 2**) Jika $n \equiv 3\ (mod 4)$, maka sisi $v_iv_{i+2}$ dilabeli sebagai berikut.

$$h(u_iu_i+2) = \begin{cases} n+1, \text{ untuk } i=0, \\ \frac{1}{4}(7n+4-i), \text{ untuk } i \equiv 1\ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}(6n+4-i), \text{ untuk } i \equiv 2\ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}(5n+4-i), \text{ untuk } i \equiv 3\ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}(8n+4-i), \text{ untuk } i \equiv 0\ (mod\ 4), i \neq 0 \end{cases}$$

Misalkan $w_h$ menyatakan bobot titik dari Graf Petersen $P(n,2)$. Berdasarkan pelabelan $h$, bobot titik $u_i, v_i$ pada Graf Petersen $P(n,2)$ untuk semua $i \in \{0,1,2,...,n-1\}$ adalah sebagai berikut.

(1) Bobot titik terhadap pelabelan total $h$ dari titik $u_i, i \in \{0,1,2,...,n-1\}$.

$$W_h(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(17n+3) + (2-i), \text{ untuk } i = 0,1, \\ \frac{1}{2}(19n+3) + \frac{1}{2}(4-2i), \text{ untuk } i = 2,3,4,...,n-1 \end{cases}$$

(2) Bobot titik terhadap pelabelan total $h$ dari titik $v_i, i \in \{0,1,2,...,n-1\}$. Pada bagian ini terbagi atas dua kasus :

(**Kasus 1**) $n \equiv 1\ (mod\ 4)$.

$$W_h(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(15n+5) + \frac{1}{2}(2-i), \text{ untuk } i = 0,2, \\ \frac{1}{2}(16n+4) + \frac{1}{2}(3-i), \text{ untuk } i = 1,3,5,...,n-2, \\ \frac{1}{2}(17n+3) + \frac{1}{2}(4-i), \text{ untuk } i = 4,6,8,...,n-1 \end{cases}$$

(**Kasus 2**) $n \equiv 3\ (mod\ 4)$.

$$W_h(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(15n+5) + \frac{1}{2}(2-i), \text{ untuk } i = 0,2, \\ \frac{1}{2}(16n+4) + \frac{1}{2}(3-i), \text{ untuk } i = 1,3,5,...,n-2, \\ \frac{1}{2}(17n+3) + \frac{1}{2}(4-i), \text{ untuk } i = 4,6,8,...,n-1 \end{cases}$$

Bobot titik total pada Graf Petersen $P(n, 2)$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{h_1} \cup W_{h_2} &= \left\{ \frac{1}{2}(17n+5), \frac{1}{2}(17n+7), \frac{1}{2}(17n+9), , \frac{1}{2}(19n+1), \frac{1}{2}(19n+3) \right\} \\ &\cup \left\{ \frac{1}{2}(15n+5), \frac{1}{2}(15n+7), \frac{1}{2}(15n+9), \frac{1}{2}(16n+4), , \frac{1}{2}(17n+3) \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}(15n+5), \frac{1}{2}(15n+7), \frac{1}{2}, , \frac{1}{2}(19n+3). \right\} \end{aligned}$$

Karena himpunan bobot titik tersebut memuat bilangan bulat terurut, maka dapat disimpulkan bahwa graf Petersen $P(n, 2)$ mempunyai pelabelan total $(a, d)$-titik antiajaib dengan $a = \frac{1}{2}(15n + 5)$ dan $d = 1$. Selanjutnya, karena himpunan label terkecil diberikan kepada himpunan sisi graf Petersen, maka pelabelan tersebut adalh pelabelan super. □

## 3. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah ditunjukkan kembali bahwa graf Petersen yang diperumum $P(n, 2)$ mempunyai pelabelan total $(\frac{15n+5}{2}, 1)$-titik-anti ajaib super.

## 4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Narwen, M.Si, Ibu Hazmira Yozza, M.Si, Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Admi Nazra dan Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

## Daftar Pustaka

[1] Ngurah. A.A.G and E.T. Baskoro. 2003. On Magic and Antimagic Labeling of Generalized Petersen Graphs, *Utilitas Math.* **63**: 97 – 107

[2] Baca, M. Y.Lin, M. Miler, M. Z. Yousief. 2007. Edge-antimagic Graph. *Discrete Mathematics.* **307**: 1232 – 1244

[3] Baca, M. F. Bertault, J.A. MacDougall, M. Miller. R. Simanjutak and Slamin. 2003. Vertex-antimagic Total Labelings of Graph. *Discussiones Math. Graph Theory* **23**: 67 – 83

[4] Bondy, J. A. and Murty, U.S.R. 1976. **Graph Theory witth Applications**. London : The Macmillan Press Ltd

[5] Markaban. 2004. Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan. Widyawara PPPG Matematika. Yogyakarta