GRAF RAMSEY $(3K_2, 2P_4)$ -MINIMAL

NADIA, LYRA YULIANTI, NARWEN

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : nadianadia2706@gmail.com*

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Diberikan graf G dan H . Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F , terdapat subgraf G yang memuat semua sisinya merah, atau subgraf H yang memuat semua sisinya biru. Kemudian notasi $F^* \nrightarrow (G, H)$ berarti bahwa terdapat pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F^* , sedemikian sehingga tidak terdapat subgraf G yang semua sisinya merah dan subgraf H yang semua sisinya biru. Graf F dikatakan sebagai graf Ramsey (G, H) -minimal jika, (1) $F \rightarrow (G, H)$, (2) $F^* \nrightarrow (G, H)$ dimana $F^* := F \setminus \{e\}$, untuk setiap $e \in E(F)$. Pewarnaan merah-biru yang tidak memuat subgraf merah G dan subgraf biru H didefinisikan sebagai pewarnaan $\neg(G, H)$. Kelas yang memuat semua graf Ramsey (G, H) -minimal ditulis dengan $\mathcal{R}(G, H)$. Pada makalah ini akan diberikan syarat perlu untuk suatu graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, 2H)$ dengan H graf terhubung sebarang, dan akan ditentukan graf yang menjadi anggota dari graf Ramsey $(3K_2, 2P_4)$ -minimal.

Kata Kunci: Graf Ramsey Minimal, Pewarnaan, Graf Lengkap, Graf Lintasan

1. Pendahuluan

Semua graf pada makalah ini adalah graf berhingga, tidak berarah dan sederhana. Misal diberikan graf G dan H . Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F , terdapat subgraf G yang memuat semua sisinya merah, atau subgraf H yang memuat semua sisinya biru. Kemudian notasi $F^* \nrightarrow (G, H)$ berarti bahwa terdapat pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F^* , sedemikian sehingga tidak terdapat subgraf G yang semua sisinya merah dan subgraf H yang semua sisinya biru. Graf F dikatakan sebagai graf Ramsey (G, H) -minimal jika, (1) $F \rightarrow (G, H)$, (2) $F^* \nrightarrow (G, H)$ dimana $F^* := F \setminus \{e\}$, untuk setiap $e \in E(F)$. Kelas yang memuat semua graf Ramsey (G, H) -minimal ditulis dengan $\mathcal{R}(G, H)$.

Untuk menentukan karakteristik dari semua graf F pada $\mathcal{R}(G, H)$ adalah masalah yang sulit. Dalam menentukan apakah himpunan $\mathcal{R}(G, H)$ berhingga atau tidak berhingga untuk graf G dan H yang diberikan juga merupakan masalah yang menarik untuk dikaji. Beberapa hasil dari Ramsey (G, H) -minimal yang sudah dibuktikan sebagai berikut. Dalam [2] dibuktikan bahwa $\mathcal{R}(K_2, H) = H$, $\mathcal{R}(2K_2, 2K_2) = \{3K_2, C_5\}$, dan $\{2K_3, K_5\}$ adalah anggota $\mathcal{R}(2K_2, K_3)$. Kemudian,

dalam [4] telah dibuktikan bahwa $\mathcal{R}(2K_2, K_{1,2}) = \{2K_{1,2}, C_4, C_5\}$. Selanjutnya, dalam [5] telah dibuktikan bahwa $\mathcal{R}(3K_2, P_3) = \{3P_3, C_4 \cup P_3, C_5 \cup P_3, C_7, C_8\}$.

2. Landasan Teori

Suatu **graf** $G = (V, E)$ adalah pasangan terurut dari V , dimana V adalah suatu himpunan tak kosong dari titik-titik, serta E adalah himpunan dari pasangan tak terurut titik-titik. Elemen dari E disebut sisi-sisi, dinotasikan $v_i v_j \in E(G)$, dimana $v_i, v_j \in V(G)$. Notasi $V(G)$ adalah untuk himpunan titik-titik, dan $E(G)$ untuk himpunan sisi-sisi dari graf G . Banyaknya titik di graf G disebut **orde**, sedangkan banyaknya sisi di graf G disebut **ukuran** dari graf G . Selanjutnya, suatu graf $H = (U, F)$ adalah **subgraf** dari graf $G = (V, E)$ jika $U \subseteq V$ dan $F \subseteq E$ [3].

Jalan pada graf G adalah barisan terhingga dari titik-titik dan sisi-sisi $v_0, v_0 v_1, v_1, v_1 v_2, v_2, \dots, v_k$. Suatu jalan adalah **lintasan** jika semua v_i yang dilewati adalah berbeda. Jika suatu lintasan dengan $k \geq 2$, $v_0 v_k$ juga sebuah sisi di graf G , maka $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_0$ adalah sebuah **siklus**. Suatu graf yang tidak mempunyai siklus dinamakan **graf asiklik**. Suatu **graf hutan** adalah sebuah graf asiklik. **Graf pohon** adalah graf asiklik terhubung [4].

Suatu graf G dikatakan **terhubung** jika untuk setiap dua titik $u, v \in G$ terdapat sebuah lintasan pada graf G dari u ke v . **Komponen** dari graf G adalah subgraf terhubung dan subgraf tersebut tidak termuat dalam subgraf terhubung lain yang lebih besar [4]. Graf F dikatakan sebagai graf Ramsey (G, H) -minimal jika, (1) $F \rightarrow (G, H)$, (2) $F^* \not\rightarrow (G, H)$ dimana $F^* := F - \{e\}$, untuk setiap $e \in E(F)$. Kelas yang memuat semua graf Ramsey (G, H) -minimal ditulis dengan $\mathcal{R}(G, H)$ Kelas $\mathcal{R}(G, H)$ didefinisikan sebagai kelas yang memuat semua graf F dengan kondisi diatas. Pewarnaan merah-biru yang tidak memuat subgraf merah G dan subgraf biru H didefinisikan sebagai pewarnaan- (G, H) .

3. Pembahasan

Berdasarkan [8] yang memberikan syarat perlu untuk graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, P_3)$ dan [10] yang memberikan syarat perlu untuk graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, nH)$ dan syarat perlu untuk graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, 2C_n)$, diperoleh lema terkait syarat perlu untuk graf yang termuat dalam $\mathcal{R}(3K_2, 2H)$, untuk setiap graf H terhubung sebarang.

Lema 3.1. Misalkan $F \in \mathcal{R}(3K_2, 2H)$. Maka

- (1) $F \setminus \{v, w\} \supseteq 2H$, untuk setiap $v, w \in V(F)$.
- (2) $F \setminus \{v\} \setminus E(C_3) \supseteq 2H$, untuk setiap $v, w \in V(F)$, $C_3 \subset F$.
- (3) $F \setminus E(2C_3) \supseteq 2H$, untuk setiap $2C_3 \in F$.
- (4) $F \setminus E(F^*) \supseteq 2H$, untuk setiap $F^* \subset F$ and F^* terhubung dengan 4 atau 5 titik.
- (5) Setiap titik dan sisi $e \in E(F)$ selalu termuat dalam suatu H di F .

Bukti.

- (1) Misalkan (1) dilanggar untuk suatu titik $(v, w) \in V(F)$, sedemikian sehingga $2H \not\subseteq F - \{v, w\}$. Jika semua sisi yang terkait dengan v dan w diwarnai de-

ngan merah dan sisanya diwarnai dengan biru, maka akan diperoleh sebuah pewarnaan $-(3K_2, 2H)$ pada F , sehingga hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, 2H)$.

- (2) Misalkan (2) dilanggar untuk suatu titik $v \in V(F)$, sedemikian sehingga $2H \not\subseteq F \setminus \{v\} \setminus E(C_3)$. Jika diwarnai semua sisi yang terkait pada v dan semua sisi pada C_3 dengan merah dan sisanya biru, maka akan diperoleh sebuah pewarnaan $-(3K_2, 2H)$ pada F , sehingga hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, 2H)$.
- (3) Misalkan (3) tidak berlaku untuk suatu $2C_3$ di F , sedemikian sehingga $2H \not\subseteq F \setminus E(2C_3)$. Jika semua sisi dari $2C_3$ diwarnai merah, dan sisanya diwarnai biru, maka diperoleh suatu pewarnaan $-(3K_2, 2H)$ pada F , sehingga hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, 2H)$.
- (4) Jika (4) dilanggar untuk suatu F^* di F , sedemikian sehingga $2H \not\subseteq F \setminus E(F^*)$, jika semua sisi dari F^* diwarnai dengan merah, dan sisanya biru, maka diperoleh suatu pewarnaan $-(3K_2, 2H)$ pada F , sehingga hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, 2H)$.
- (5) Untuk menunjukkan (5), andaikan tidak terdapat sisi $e \in E(F)$ sedemikian sehingga e tidak termuat dalam suatu H pada F . Dengan keminimalan F , dimiliki sebuah pewarnaan $-(3K_2, 2H)$ pada $F \setminus \{e\}$. Jika sisi e yang tidak termuat dalam suatu H pada F diwarnai dengan biru maka juga diperoleh sebuah pewarnaan $-(3K_2, 2H)$ pada F , sehingga hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, 2H)$. $\square$

Selanjutnya diperoleh graf terhubung yang menjadi anggota graf $\mathcal{R}(3K_2, 2P_4)$. Berdasarkan hasil dari [9] yang memperoleh beberapa anggota $\mathcal{R}(3K_2, 2P_3)$, maka diperoleh graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, 2P_4)$, seperti pada teorema berikut:

Teorema 3.2. *Misal terdapat graf $3K_2$ dan graf $2P_4$, maka $\{C_{13}, C_{14}\} \subseteq \mathcal{R}(3K_2, 2P_4)$.*

Bukti. Tanpa mengurangi keumuman, akan ditunjukkan bahwa C_{13} seperti pada Gambar 1 adalah anggota kelas $\mathcal{R}(3K_2, 2P_4)$. Selanjutnya, misalkan tidak ada $3K_2$ merah, maka akan ditunjukkan selalu ada $2P_4$ biru. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi C_{13} yang tidak memuat $3K_2$ merah.

Kasus 1. Jika graf C_{13} memuat $2P_4$ biru diantara $2P_3$ merah. Ambil titik v_1 dan v_3 . Warnai semua sisi yang terkait dengan v_1 dan v_3 dengan warna merah, seperti pada Gambar 2 (kiri), maka graf tersebut memuat $2P_4$ biru.

Kasus 2. Jika graf C_{13} tidak memuat $2P_4$ biru diantara $2P_3$ merah. Ambil titik v_1 dan v_5 . Warnai sisi yang terkait dengan v_1 dan v_5 dengan warna merah seperti pada Gambar 2 (kanan), maka graf memuat $2P_4$ biru.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $C_{13} \setminus \{e\} \not\rightarrow (3K_2, 2P_4)$. Misalkan satu sisi sebarang pada C_{13} dihapus seperti pada Gambar 3. Graf $C_{13} \setminus \{e\}$ akan isomorfik dengan graf P_{13} . Ambil titik v_4 dan v_{10} , warnai sisi-sisi yang terkait dengan warna merah, maka tidak terdapat $2P_4$ biru. Karena graf tersebut siklik, maka dengan satu cara mewarnai sisi yang terkait pada suatu titik, berarti sudah menguji semua cara mewarnai sisi yang terkait pada titik yang berbeda. $\square$

Gambar 1. Graf $C_{13} \in \mathcal{R}(3K_2, 2P_4)$ Gambar 2. Graf C_{13} memuat P_5 merah dan memuat $2P_3$ merah

Selanjutnya ditemukan suatu graf tak terhubung yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, 2P_4)$.

Teorema 3.3. *Misal terdapat graf $3K_2$ dan $2P_4$, maka $4P_4 \in \mathcal{R}(3K_2, 2P_4)$.*

Bukti. Akan ditunjukkan $4P_4 \rightarrow (3K_2, 2P_4)$. Perhatikan Gambar 3. Misalkan tidak terdapat subgraf $3K_2$ merah pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi $4P_4$, maka harus selalu ada subgraf $4P_4$ biru. Misalkan setiap subgraf $4P_4$ dinotasikan dengan P^1, P^2, P^3, P^4 dimana P^i adalah graf P_4 ke i . Ambil dua titik sebarang pada P^i dan P^j dengan i tidak harus berbeda dengan j . Warnai sisi yang terkait dengan titik tersebut dengan warna merah, sementara sisi selainnya diwarnai dengan warna biru, maka akan diperoleh subgraf $4P_4$ biru.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $4P_4 \setminus \{e\} \nrightarrow (3K_2, 2P_4)$ untuk sebarang $e \in 4P_4$. Misalkan sebarang sisi e pada subgraf P^i dihapus. Lakukan pewarnaan seperti sebelumnya pada setiap subgraf selain P^i , maka tidak diperoleh subgraf $2P_4$ biru. $\square$

 Gambar 3. Graf $4P_4 \in \mathcal{R}(3K_2, 2P_4)$

4. Kesimpulan

Dari hasil pembuktian lema dan teorema sebelumnya, diperoleh syarat perlu untuk menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, 2H)$, dimana H adalah graf terhubung sebarang. Selanjutnya, dengan menggunakan syarat perlu tersebut, diperoleh graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, 2P_4)$, yaitu $\{C_{13}, C_{14}, 4P_4\}$.

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada Ibu Dr. Des Welyyanti, bapak Dr. Effendi dan ibu Radhiatul Husna, M.si selaku tim penguji dalam penelitian makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Baskoro, E.T., and L. Yulianti, (2011): On Ramsey minimal graphs for $2K_2$ versus P_n , *Advances Applications in Discrete Mathematics* **2**, 83 – 90
- [2] Burr, S. A., Erdős, P., dan Lovás, L., (1976): On Graphs of Ramsey Type, *Ars Combinatoria* **1**: 167 – 190
- [3] Diestel, R., (2000): *Graph Theory*, Springer Verlag New york Inc., Newyork.
- [4] Mengersen, I., dan Oeckermann, J., (1999): Matching-star Ramsey Sets, *Discrete Applied Mathematics* **95**: 417 – 424
- [5] Muhshi, H., E.T, Baskoro., (2011): On Ramsey $(3K_2, P_3)$ -minimal graphs, *AIP Conference Proceeding* **1450**: 110 – 117
- [6] Seplinda, Mutia., (2016): Graf Ramsey $(3K_2, 2P_3)$ -Minimal, *Tesis*, tidak diterbitkan, Universitas Andalas, Padang.
- [7] Tatanto, D., dan Baskoro, E. T., (2012): On Ramsey $(2K_2, 2P_n)$ -minimal graphs, *AIP Conference Proceeding* **1450**: 90 – 95
- [8] Wijaya K, Baskoro ET, Assiyatun H, Suprijanto D., (2016): On Ramsey (mK_2, H) -minimal graphs, *Graphs and Combinatorics*, DOI 10.1007/s00373-016-1748-1.
- [9] Yulianti, L.,(2011): Graf Ramsey Minimal untuk Kombinasi Graf Dua Sisi dengan Siklus, *Disertasi*. tidak diterbitkan. Institut Teknologi Bandung.
- [10] Yulianti, L., dan Admi Nazra., (2018): A Note on The Ramsey Minimal Graphs for Matching versus Multiple Copies of Cycles, Submitted