Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **1** Hal. 242 – 248
Edisi Mei 2019
ISSN : 2303–291X

FAKTORISASI MATRIKS

NEVI NURMALASARI, YANITA, I MADE ARNAWA
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus Unand Limau Manis, Padang, Indonesia
email : nurmalasarinevi@gmail.com

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Faktorisasi suatu matriks adalah suatu cara untuk menjadikan suatu matriks menjadi dua atau beberapa perkalian matriks. Misalkan A adalah suatu matriks, maka faktorisasi dari A dapat berbentuk $A = A_1A_2$ atau $A = A_1A_2A_3\cdots$, dengan ukuran-ukuran yang disesuaikan untuk A_i. Menyelesaikan suatu faktorisasi ada yang menggunakan nilai/vektor eigen dan ada yang tanpa menggunakan nilai/vektor eigen.

Kata Kunci: Faktorisasi, Nilai/vektor Eigen, Eliminasi Gauss, Basis, Proses Gram-Schmidt

1. Pendahuluan

Nilai eigen adalah suatu kajian yang terkait dengan sutu matriks atau suatu operator linear. Nilai eigen banyak digunakan dalam aplikasi ilmu matematika. Salah satu kegunaan nilai eigen adalah untuk melihat bentuk faktorisasi dari suatu matriks. Ada beberapa bentuk faktorisasi dalam matriks, diantaranya adalah faktorisasi yang terkait dengan masalah diagonalisasi matriks, faktorisasi yang terkait dengan masalah similaritas, faktorisasi Schur, faktorisasi nilai singular. Dari beberapa faktorisasi tersebut ada yang menggunakan nilai/vektor eigen dan ada tanpa menggunaka nilai/vektor eigen.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. *Teori Matriks*

Definisi 2.1. [1] *Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.*

Definisi 2.2. [1] *Suatu matriks persegi A adalah simetrik jika $A = A^T$.*

Definisi 2.3. [1] *Matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah dan matriks bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas. Suatu matriks, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga.*

Definisi 2.4. [1] *Misalkan A adalah matriks bujursangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan det dan didefinisikan* $\det(A)$ *sebagai jumlah semua hasilkali elementer bertanda dari A.*

2.2. *Metode Eliminasi Gauss*

Suatu matriks disebut eselon baris jika:

(1) Satu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka bilangan taknol pertama pada baris itu adalah 1. Bilangan 1 ini disebut 1 utama.
(2) Terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini akan dikelompokkan bersama pada bagian paling bawah matriks.
(3) Terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.

Operasi baris elementer (OBE) dilakukan dengan langkah sebagai berikut.

(1) Mengalikan suatu baris dengan suatu konstata yang tak sama dengan nol.
(2) Menukarkan dua baris tersebut.
(3) Menambahkan perkalian dari satu baris pada baris lainnya.

Metode menentukan solusi suatu sistem persamaan linear yang langkah-langkahnya sebagai berikut disebut metode eliminasi Gauss.

(1) Menyatakan sistem persamaan linear dalam bentuk matriks diperbesar.
(2) Mengubah matriks diperbesar menjadi matriks eselon baris dengan operasi baris elementer.
(3) Melakukan substitusi mundur untuk memperoleh solusi sistem persamaan linear tersebut.

2.3. *Nilai dan Vektor Eigen*

Definisi 2.5. [1] *Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol $\boldsymbol{x}$ pada $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$; jelasnya, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan $\boldsymbol{x}$ disebut vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.*

Teorema 2.6. [1] *Misalkan $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Skalar λ nilai eigen dari A jika dan hanya jika $(A - \lambda I)$ singular, artinya jika dan hanya jika* $\det(A - \lambda I) = 0$.

Definisi 2.7. [4] *Misalkan $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, maka* $\det(A - \lambda I)$ *adalah polinomial berderajat p dengan variabel λ, disebut polinomial karakteristik $f(\lambda)$ dari A, ditulis* $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Teorema 2.8. [7] *Misalkan $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, maka nilai eigen dari $A^T A$ adalah riil dan nonnegatif.*

Teorema 2.9. [7] *Misalkan $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Maka nilai eigen dari AA^T adalah riil dan nonnegatif.*

3. Pembahasan

3.1. *Faktorisasi Matriks dengan Menggunakan Nilai / Vektor Eigen*

3.1.1. *Faktorisasi Schur*

Definisi 3.1. [2] *Matriks bujursangkar $A_{n\times n}$ disebut uniter jika $A^*A = AA^* = I$, yaitu jika $A^* = A^{-1}$.*

Suatu matriks A dikatakan uniter jika vektor-vektor kolom membentuk himpunan ortonormal. [7]

Teorema 3.2. [7] *(Teorema Schur) untuk setiap matriks A yang berukuran $n \times n$, terdapat matriks uniter U sehingga U^*AU adalah matriks segitiga atas (upper triangular).*

Bukti. Pembuktian dilakukan dengan melakukan induksi terhadap n.
Hasilnya jelas jika $n = 1$. Asumsikan bahwa hipotesis tersebut berlaku untuk matriks $k \times k$.

Selanjutnya misalkan A adalah suatu matriks $(k+1)\times(k+1)$. Misalkan λ_1 adalah nilai eigen dari matriks A dan $\boldsymbol{w}_1$ adalah vektor eigen dari λ_1. Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt, susun $\boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_{k+1}$ sedemikian sehingga $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_{k+1}\}$ adalah suatu basis ortonormal. Misalkan W adalah suatu matriks yang vektor kolom ke-i nya adalah $\boldsymbol{w}_i$ untuk $i = 1, \cdots, k+1$. Jadi, dengan susunan ini, W adalah uniter. Kolom pertama dari W^*AW akan menjadi $W^*A\boldsymbol{w}_1$, dimana $W^*A\boldsymbol{w}_1 = \lambda_1 W^*\boldsymbol{w}_1 = \lambda_1 e_1$. Jadi W^*AW adalah suatu matriks berbentuk

$$\begin{bmatrix} \lambda & x & x & \cdots & x \\ 0 & & & & \\ : & & M & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

dimana M adalah suatu matriks $k \times k$.

Berdasarkan hipotesis induksi, terdapat suatu matriks uniter V_1 yakni k x k, sedemikian sehingga $V_1^*MV_1 = T_1$, dimana T_1 adalah matriks segitiga. Misalkan

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & \\ : & V_1 & \\ 0 & & \end{bmatrix}, \text{ dimana } V \text{ adalah uniter dan}$$

$$V^*W^*AWV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x & \cdots & x \\ 0 & & & \\ : & & V_1^*MV_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x \cdots & x \\ 0 & & \\ : & T_1 & \\ 0 & & \end{bmatrix} = T.$$

Misalkan $U = WV$. Matriks U adalah uniter, karena

$$U^*U = (WV)^*WV = V^*W^*WV = I, \text{ dan } U^*AU = T. \qquad \square$$

Faktorisasi $A = UTU^*$ seringkali dirujuk sebagai faktorisasi Schur dari A. Pada kasus dimana matriks A adalah hermite, maka matriks T akan menjadi matriks diagonal.

3.1.2. *Faktorisasi Nilai Singular*

Teorema 3.3. *Jika suatu matriks A mempunyai nilai singular taknol r, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ dengan $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$, maka rank $A = r$.*

Bukti. Misalkan $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ suatu basis ortonormal dari $\mathbb{R}^n$ dari vektor eigen A^TA, mengakibatkan bahwa nilai-nilai eigen dari A^TA memenuhi $\lambda_1 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, maka untuk $i \neq j$

$$(A\boldsymbol{v}_i)^T(A\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_i^T A^T A\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_i^T(\lambda_j\boldsymbol{v}_j) = 0$$

karena $\boldsymbol{v}_i$ dan $\lambda_j\boldsymbol{v}_j$ ortogonal, dengan demikian $\{A\boldsymbol{v}_1 \cdots, A\boldsymbol{v}_n\}$ adalah himpunan ortogonal. Misalkan r banyaknya nilai singular taknol dari A, maka r merupakan banyaknya nilai eigen taknol dari A^TA. Diketahui bahwa $A\boldsymbol{v}_i \neq 0$ jika dan hanya jika $1 \leq i \leq r$, maka $\{A\boldsymbol{v}_1 \cdots, A\boldsymbol{v}_r\}$ adalah bebas linear dan jelas pada Col A. Selanjutnya untuk setiap $\boldsymbol{y}$ pada Col A, $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, misalkan $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$. Maka

$$\begin{aligned}\mathbf{y} = A\boldsymbol{x} &= c_1A\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_rA\boldsymbol{v}_r + c_{r+1}A\boldsymbol{v}_{r+1} + \cdots + c_nA\boldsymbol{v}_n \\ &= c_1A\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_rA\boldsymbol{v}_r + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0}\end{aligned}$$

Sehingga $\mathbf{y}$ pada $Span\{A\boldsymbol{v}_1 \cdots, A\boldsymbol{v}_r\}$, yang menunjukkan bahwa $\{A\boldsymbol{v}_1 \cdots, A\boldsymbol{v}_r\}$ adalah basis ortogonal untuk Col A. Oleh karena itu $rank(A) = r$. $\square$

Faktorisasi dari A melibatkan suatu matriks $\Sigma_{m\times n}$ dengan bentuk

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana D adalah matriks diagonal berukuran $r \times r$.

Teorema 3.4. [6] *Jika A matriks $m \times n$ dengan rank r, maka terdapat matriks $\Sigma_{m\times n}$, dimana elemen diagonal di D adalah nilai singular dari A, yaitu $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, terdapat matriks $U_{m\times m}$ dan $V_{n\times n}$ ortogonal, sedemikian sehingga*

$$A = U\Sigma V^T$$

Bukti. Misalkan λ_i dan $\boldsymbol{v}_i$ adalah seperti bukti pada Teorema 3.3, maka $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} = \|A\boldsymbol{v}_i\| > 0$ untuk $1 \leq i \leq r$,dan $\{A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, \cdots, A\boldsymbol{v}_r\}$ adalah basis ortogonal dari Col A. Untuk $1 \leq i \leq r$, didefinisikan

$$\boldsymbol{u}_i = \tfrac{1}{\|A\boldsymbol{v}_i\|}\ A\boldsymbol{v}_i = \tfrac{1}{\sigma_i}\ A\boldsymbol{v}_i$$

sehingga

$$A\boldsymbol{v}_i = \sigma_i \boldsymbol{u}_i,\ 1 \le i \le r.$$

Lalu $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ adalah basis ortonormal dari kolom A. Perluas himpunan $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ ke suatu basis ortonormal $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ dari $\mathbb{R}^m$, dan misal

$$U = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{u}_m] \text{ dan } V = [\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{v}_n]$$

maka U dan V matriks ortogonal. Perhatikan hubungan berikut :

$$AV = [A\boldsymbol{v}_1 \quad \ldots \quad A\boldsymbol{v}_r \quad 0 \quad \ldots \quad 0] = [\sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \quad \ldots \quad \sigma_r \boldsymbol{u}_r \quad 0 \quad \ldots \quad 0]$$

misal D diagonal matriks denga elemen $\sigma_i \ldots \sigma_r$, dan Σ maka

$$U\Sigma = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{u}_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 & 0 \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \sigma_r & \\ & & & & \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \cdots \sigma_r \boldsymbol{u}_r \quad 0 \cdots 0] = AV,$$

dimana V matriks ortogonal, $U\Sigma V^T = AVV^T = A$. $\square$

Teorema tersebut juga menyatakan bahwa matriks $A_{m\times n}$ dapat dinyatakan sebagai faktorisasi matriks yaitu U, Σ dan V.

Matriks Σ merupakan matriks diagonal dengan elemen diagonalnya berupa nilai-nilai singular matriks A, sedangkan matriks U dan V merupakan matriks-matriks yang kolom-kolomnya berupa vektor singular kiri dan vektor singular kanan dari matriks A untuk nilai singular yang bersesuaian.

3.2. *Faktorisasi Matriks Tanpa Menggunakan Nilai Eigen*

3.2.1. *Faktorisasi LU*

Faktorisasi LU merupakan salah satu faktorisasi tanpa menggunakan nilai eigen. Dengan menggunakan eliminasi Gauss suatu sistem linear dapat dipecah dengan mengoperasikan matriks yang diperbesar secara sistematis. Pada bagian ini didasarkan atas pemfaktoran matriks koefisien ke dalam hasil kali matriks segitiga atas dan segitiga bawah.

Teorema 3.5. [1] *Jika matriks $A_{n\times n}$ dapat direduksi terhadap bentuk eselon baris U tanpa menggunakan pertukaran baris, maka A dapat difaktorkan sebagai $A = LU$ dimana L adalah matriks segitiga bawah.*

Bukti. Anggap bahwa matriks A yang berukuran $n \times n$ telah direduksi menjadi bentuk eselon baris U dengan sebuah urutan operasi elementer. Masing-masing operasi ini dapat dipecah dengan mengalikan pada bagian kiri dengan matriks elementer yang tepat. Jadi, dapat dicari matriks elementer $E_1, E_2, \cdots, E_k$ sedemikian sehingga

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = U. \tag{3.1}$$

Invers dari matriks elementer $E_1, E_2, \ldots, E_k$ dapat dikalikan dengan kedua ruas pada bagian kiri dari persamaan (3.1) sedemikian sehingga

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U.$$

Matriks L didefinisikan oleh

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1},$$

yang merupakan segitiga bawah yang juga menetapkan bahwa tidak ada pertukaran baris yang digunakan dalam mereduksi A ke U. Dengan demikian diperoleh

$$A = LU,$$

yang merupakan faktorisasi matriks A ke dalam hasil kali matriks segitiga bawah dan matriks segitiga atas. □

3.2.2. *Faktorisasi Cholesky*

Teorema 3.6. [5] *Jika A matriks riil, simetrik, dan matriks definit positif, maka A mempunyai faktorisasi unik, $A = LL^T$ dimana L adalah segitiga bawah dengan suatu diagonal positif.*

Bukti. Misalkan matriks A simetrik dan definit positif, berarti $A = A^T$ dan determinan dari matriks A besar dari 0 maka matriks A adalah nonsingular. Teorema 3.5 menunjukkan bahwa A mempunyai faktorisasi LU. Karena A simetrik maka,

$$LU = A = A^T = U^T L^T, \tag{3.2}$$

berarti,

$$U(L^T)^{-1} = L^{-1} U^T. \tag{3.3}$$

Ruas kiri dari pesamaan (3.3) adalah segitiga atas, sedangkan ruas kanan dari persamaan (3.3) adalah segitiga bawah. Akibatnya ada matriks diagonal D sehingga $U(L^T)^{-1} = D$. Oleh karena itu $U = DL^T$ dan $A = LDL^T$. D adalah definit positif, dan dengan demikian entri d_{11} positif. Mariks diagonal yang entri diagonal utamanya adalah $\sqrt{d_{ii}}$ dinotasikan de-ngan $D^{1/2}$, maka $A = L_1 L_1^T$ dimana $L_1 = LD^{1/2}$. Ini merupakan faktorisasi Cholesky. □

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah dibahas beberapa contoh faktorisasi matriks dengan nilai/vektor eigen dan tanpa nilai/vektor eigen, sehingga kesimpulan yang didapat sebagai berikut.

(1) Faktorisasi matriks dengan menggunakan nilai eigen yaitu:

  (a) Faktorisasi Schur.
  Pada faktorisasi Schur matriks A harus berukuran $n \times n$. Bentuk faktorisasi schur adalah $A = UTU^*$.

(b) Faktorisasi Nilai Singular.
Pada faktorisasi nilai singular matriks A berukuran $m \times n$. Bentuk faktorisasi nilai singular adalah $A = U\Sigma V^T$.

(2) Menfaktorisasi matriks tanpa menggunaka nilai eigen yaitu:

(a) Faktorisasi LU.
Pada faktorisasi LU matriks A berukuran $n \times n$. Bentuk faktorisasi LU adalah $A = LU$.

(b) Faktorisasi Cholesky.
Pada faktorisasi cholesky Matriks A harus marupakan matriks simetris. Bentuk faktorisasi cholesky adalah $A = L_1 L_1^T$.

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, ibu Hazmira Yozza, M.Si, dan ibu Monika Rianti Helmi, M.Si, selaku dosen penguji, yang telah memberikan kritik dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*; edisi ke-8 Terjemahan. Erlangga, Jakarta.
[2] Ayres, F. 1982. *Theory and Problem of Matriks.* Mc Graw-Hill, Singapura.
[3] Hager, W.W. 1988. *Applied Linear Algebra.* Prentice Hall Inc. Englewood Cliff, New Jersey.
[4] Jacob, B. 1990. *Linear Algebra.* W.H.Freeman and Company, USA.
[5] Kincaid, D and Cheney, W. 1991. *Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing.* Wadsworth Inc. Belmont, California.
[6] Lay, D.C. 1996. *Linear Algebra and its Application.* MA: Addison-Wesley, California.
[7] Leon, S.J. 1998. *Linear Algebra with Applications*; 5^{th} edition. United States of America : Prentice-Hall Inc, Amerika.
[8] Noble, B and Daniel, J.W. 1998. *Applied Linear Algebra.* 3^{rd} edition. Prentice-Hall, New Jersey.