Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **1** Hal. 249 – 254
Edisi Mei 2019
ISSN : 2303–291X

TEOREMA PEMBAGIAN PADA RING POLINOMIAL $R[X]$

ORIEN LUISA, YANITA, NOVA NOLIZA BAKAR
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : orienluisa12@gmail.com

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Teorema pembagian terdapat pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan dapat diperluas pada ring polinomial $R[X]$. Dengan R yang suatu ring komutatif, $R[X] = \{a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0 \mid a_i \in R, n$ adalah bilangan bulat non-negatif $\}$ merupakan himpunan yang memuat semua polinomial atas R dalam variabel tak tentu X. Pada penelitian ini dikaji Teorema pembagian pada ring polinomial $R[X]$ dan bagaimana suatu polinomial pada ring polinomial $R[X]$ terevaluasi di $r \in R$.

Kata Kunci: Ring, Polinomial, Ring Polinomial $R[X]$, Evaluasi, Homomorfisma

1. Pendahuluan

Pada operasi pembagian himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terdapat suatu Teorema Pembagian (Division Theorem) [3]. Teorema ini terkait dengan suatu bilangan bulat yang jika dibagi dengan bilangan bulat lain akan memiliki hasil bagi dan sisa, sedemikian sehingga $a = bq + r$ dengan $0 \leqslant r < |b|$ dimana a, $b \in \mathbb{Z}$. Pada teorema ini, q adalah hasil bagi bilangan bulat a oleh bilangan bulat b dan r adalah sisa dari pembagian tersebut, nilai q dan r tunggal di $\mathbb{Z}$.

Ring merupakan suatu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian yang memenuhi beberapa aksioma. Ring dinotasikan dengan R. Suatu ring R dikatakan ring komutatif jika $a \cdot b = b \cdot a$, untuk setiap a, $b \in R$ [8].

Suatu fungsi $f(x)$ disebut polinomial apabila $f(x)$ dapat ditulis sebagai $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dimana n suatu bilangan bulat non-negatif dan $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ adalah koefisien dari $f(x)$. Koefisien $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ merupakan elemen-elemen dari suatu himpunan.

Jika R suatu ring komutatif, maka ring polinomial $R[X]$ merupakan himpunan yang memuat semua polinomial dalam variabel tak tentu X, yang koefisien-koefisien untuk setiap polinomialnya berada di R.

Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dijelaskan bagimana Teorema Pembagian itu juga berlaku pada ring polinomial $R[X]$ dan bagaimana suatu polinomial pada ring polinomial $R[X]$ tersebut terevaluasi di $r \in R$.

2. Landasan Teori

2.1. *Pembagi Persekutuan Terbesar (Greatest Common Divisor)*

Definisi 2.1. [4] *Misalkan a, $b \in \mathbb{Z}$, dengan $a \neq 0$, dikatakan a membagi habis b jika terdapat suatu elemen $c \in \mathbb{Z}$, sedemikian sehingga $b = ac$.*
Simbol :

(1) Jika a membagi habis b, maka ditulis dengan $a \mid b$.
(2) Jika a tidak membagi habis b, maka ditulis dengan $a \nmid b$.

Definisi 2.2. [4] *Misalkan a, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, terdapat $d \in \mathbb{Z}^+$ yang tunggal, d dikatakan pembagi persekutuan terbesar(greatest common divisor) dari a dan b jika memenuhi sifat berikut :*

(1) $d \mid a$ dan $d \mid b$.
(2) Jika $c \mid a$ dan $c \mid b$, maka $c \mid d$.

Jika d pembagi persekutuan terbesar dari a dan b, maka disimbolkan dengan ppb(a,b) atau gcd(a,b).

2.2. *Fungsi*

Definisi 2.3. [1] *Misalkan A dan B adalah dua himpunan tak kosong, f dikatakan suatu fungsi dari A ke B jika setiap unsur di A dipetakan secara tunggal ke suatu unsur di B, ditulis $f : A \to B$. Apabila f memetakan suatu $x \in A$ ke suatu $y \in B$ maka y disebut peta dari x, ditulis dengan $f : x \mapsto y$, sedangkan x disebut prapeta dari y. Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f dan himpunan B dinamakan daerah kawan (kodomain) dari fungsi f tersebut.*

Definisi 2.4. [1] *Misalkan $f : A \to B$ suatu fungsi dari A ke B.*

(1) Injektif (Satu-satu)
Fungsi f dikatakan injektif (satu-satu) jika untuk setiap x_1 dan x_2 di A dengan $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$.
(2) Surjektif (Pada)
Fungsi f dikatakan surjektif (pada) jika $f(A) = B$, yang berarti daerah hasil $R(f) = B$.
(3) Bijektif (korespondensi satu-satu)
Fungsi f dikatakan bijektif jika f injektif dan surjektif.

2.3. *Well-Ordering Principle (Prinsip Terurut dengan Baik)*

Definisi 2.5. [2] *Jika S adalah himpunan bilangan bulat non-negatif dan S tak kosong, maka S memuat elemen terkecil, yaitu terdapat bilangan bulat $a \in S$ sedemikian sehingga $a \leqslant b$ untuk setiap $b \in S$.*

2.4. *Ring*

Definisi 2.6. [8] *Himpunan tak kosong R dikatakan suatu ring jika pada R terdapat dua operasi yang dinyatakan dengan " $+$ " dan " $\cdot$ " , sedemikian sehingga untuk setiap a , b , $c \in R$ berlaku :*

(1) $a + b \in R$,
(2) $a + b = b + a$,
(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$,
(4) Terdapat sebuah 0 di R sehingga $a + 0 = a$ (untuk setiap $a \in R$),
(5) Terdapat sebuah $-a \in R$ sehingga $a + (-a) = 0$,
(6) $a \cdot b \in R$,
(7) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
(8) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *dan* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Definisi 2.7. [8] *Suatu ring R dikatakan ring dengan unsur satuan, jika terdapat $1 \in R$ sedemikian sehingga $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\forall a \in R$.*

Definisi 2.8. [8] *Suatu ring R dikatakan ring komutatif jika $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\ a, b \in R$.*

Definisi 2.9. [8] *Jika R suatu ring komutatif, maka $a \neq 0 \in R$ dikatakan pembagi nol, jika terdapat $b \in R$ dengan $b \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = 0$.*

Definisi 2.10. [8] *Suatu ring komutatif R dikatakan daerah integral, jika R tidak mempunyai pembagi nol.*

Definisi 2.11. [9] *Misalkan R suatu ring, $S \subseteq R$, dan $S \neq \emptyset$. S disebut subring dari R jika S dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian yang sama dengan R juga merupakan ring.*

Definisi 2.12. [8] *Pemetaan ϕ dari ring R ke ring $\boldsymbol{R}$ dikatakan suatu homomorfisma ring jika :*

(1) $\phi\ (a + b) = \phi(a)\ +\ \phi(b)$
(2) $\phi\ (a.b) = \phi(a)\ \cdot\ \phi(b)$

untuk setiap a , $b \in R$.

2.5. *Ring Polinomial*

Definisi 2.13. [10] *Suatu polinomial dalam variabel tak tentu x adalah jumlah hingga dari monomial dengan derajat berbeda. Polinomial dalam variabel tak tentu x dinotasikan dengan $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, dan sebagainya. Suatu fungsi $f(x)$ disebut polinomial apabila $f(x)$ dapat ditulis sebagai*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

dimana n suatu bilangan bulat non-negatif dan $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ adalah koefisien dari $f(x)$. Koefisien $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ merupakan elemen-elemen dari suatu himpunan. Suku a_0 disebut suku konstanta dari polinomial. Suku $a_nx^n (a_n \neq 0)$ disebut *suku utama, koefisiennya disebut koefisien utama dan derajatnya disebut derajat dari polinomial. Derajat dari $f(x)$ dinotasikan dengan deg$(f(x))$.*

Definisi 2.14. [6] *Misal R suatu ring komutatif.*

$$R[X] = \{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 | a_i \in R, nadalahbilanganbulatnon-negatif\}.$$

merupakan himpunan yang memuat semua polinomial atas R dalam variabel tak tentu X. Dua elemen

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

dan

$$b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0$$

di $R[X]$ dianggap sama jika dan hanya jika $a_i = b_i$ untuk semua bilangan bulat non-negatif i.

Definisi 2.15. [6] *Penjumlahan dan perkalian pada $R[X]$*
Misal R suatu ring komutatif dan misalkan $f[X]$, $g[X] \in R[X]$ dengan

$$f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0,$$
$$g(X) = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0.$$

Maka

$$\begin{aligned} f(X) + g(X) &= (a_s + b_s)X^s + (a_{s-1} + b_{s-1})X^{s-1} + \cdots + (a_1 + b_1)X + a_0 + b_0, \\ &\quad s = \max\{m, n\} \\ f(X)g(X) &= c_{m+n}X^{m+n} + c_{m+n-1}X^{m+n-1} + \cdots + c_1X + c_0, \\ &\quad c_k = a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_1b_{k-1} + a_0b_k,\ k = 0, \cdots, m+n. \end{aligned}$$

Proposisi 2.16. [7] *Untuk setiap $f(X)$, $g(X) \neq \mathbf{0} \in R[X]$ berlaku :*

(1) Jika deg$(f(X)) \neq$ deg$(g(X))$, maka deg$(f(X) + g(X)) = \max($deg$(f(X))$, deg$(g(X)))$.
(2) Jika R tidak mempunyai pembagi nol, maka deg$(f(X)g(X))$ = deg$(f(X))$ + deg$(g(X))$.

2.6. *Teorema Pembagian pada $\mathbb{Z}$*

Teorema 2.17. [3] *Untuk sebarang a, $b \in \mathbb{Z}$, dengan $b \neq 0$, terdapat $q \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$ yang tunggal, sedemikian sehingga*

$$a = bq + r, \quad \textit{dengan } 0 \leq r < |b|.$$

Salah satu penggunaan dari Teorema Pembagian pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah untuk menentukan gcd (*greatest common divisor*), yaitu pada saat $r = 0$ atau dengan kata lain a habis dibagi oleh b karena sisa pembagian adalah 0. Selanjutnya, teorema pembagian ini diperluas pada ring polinomial $R[X]$.

3. Pembahasan

3.1. *Teorema Pembagian pada Ring Polinomial R[X]*

Teorema 3.1. [5] *Himpunan $R[X]$ dari semua polinomial dalam variabel tak tentu X dengan koefisiennya dalam suatu ring R, membentuk ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian polinomial. Jika R komutatif, maka $R[X]$ juga komutatif dan jika R mempunyai unsur satuan **1**, maka **1** juga unsur satuan untuk $R[X]$.*

Teorema 3.2. [3] *Untuk sebarang f(X) dan g(X) $\in$ R[X], dengan g(X) $\neq$ **0**, terdapat q(X) dan r(X) $\in$ R[X] yang tunggal, sedemikian sehingga*

$$f(X) = g(X)q(X) + r(X)$$

*dengan r(X) = **0** atau deg(r(X)) < deg(g(X)).*

3.2. *Evaluasi*

Definisi 3.3. [7] *Misalkan $A \in R[X]$ dengan $A = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$. Untuk setiap $A \in R[X]$, A dikatakan terevaluasi di $r \in R$ jika*

$$A(r) = a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0 \in R.$$

Proposisi 3.4. [7] *Jika R komutatif , maka evaluasi di $r \in R$ adalah suatu homomorfisma dari $R[X]$ ke R. Lebih umumnya, jika R adalah suatu subring dari S dan $s \in S$ komutatif dengan setiap elemen di R, maka evaluasi di s adalah suatu homomorfisma dari $R[X] \subseteq S[X]$ ke S.*

4. Kesimpulan

Berikut merupakan kesimpulan berdasarkan hasil pembahasan :

(1) Jika pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ berlaku Teorema Pembagian sebagai berikut: untuk sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, dengan $b \neq 0$, terdapat tunggal $q \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$, sedemikian sehingga $a = bq + r$ dengan $0 \leqslant r < |b|$; maka pada ring polinomial $R[X]$ juga berlaku Teorema Pembagian yang analog dengan Teorema Pembagian pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, sehingga dapat diperoleh sebagai berikut : untuk sebarang $f(X)$ dan $g(X) \in R[X]$, dengan $g(X) \neq \mathbf{0}$, terdapat tunggal $q(X)$ dan $r(X) \in R[X]$, sedemikian sehingga $f(X) = g(X)q(X)+r(X)$ dengan $r(X) = \mathbf{0}$ atau $deg(r(X)) < deg(g(X))$.

(2) Misalkan $A \in R[X]$ dengan $A = a_0+a_1X+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}+a_nX^n$. Polinomial A dapat dievaluasi di $r \in R$ jika $A \in R[X]$ dan $r \in R$ sedemikian sehingga

$$A(r) = a_0 + a_1r + \cdots + a_{n-1}r^{n-1} + a_nr^n \in R.$$

(3) Jika R komutatif, maka evaluasi di $r \in R$ adalah suatu homomorfisma dari $R[X]$ ke R.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi dan Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan selaku penguji sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bartle, R.G. and Sherbert, D.R. 2000. *Introduce To Real Analysis* 3^{rd} Edition. John Wiley and Sons, USA
[2] Burton, D.M. 1976. *Elementary Number Theory.* Allyn and Bacon, USA
[3] Conrad, K. 1973. *The Division Theorem in* $\mathbb{Z}$ *and* R[T]. Amer Math, USA
[4] Dummit, D.S. and Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra.* Prentice-Hall, USA
[5] Fraleigh, J.B. 2003. *A First Course In Abstract Algebra* 7^{th} Edition. Addison-Wesley, Boston
[6] Gallian, J.A. 2006. *Contemporary Abstract Algebra* 7^{th} Edition. Brooks/Cole, USA
[7] Grillet, P.A. 2007. *Abstract Algebra* 2^{nd} Edition. Springer, USA
[8] Herstein, I.N. 1975. *Topics In Algebra* 2^{nd} Edition. Wiley, New York
[9] Herstein, I.N. 1996. *Abstract Algebra* 3^{rd} Edition. Prentice-Hall, USA
[10] Leung, K.T. and Mok, I.A.C. and Suen, S.N. 1992. *Polynomials And Equations.* Hong Kong University Press, Hong Kong