Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **2** Hal. 1 – 6
Edisi Agustus 2019
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

SIFAT-SIFAT PEMETAAN TERDIFERENSIAL PADA PERMUKAAN REGULAR

ABRAR ZULKAMAR, HARIPAMYU, JENIZON

Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : zahratulaini35@gmail.com

Diterima 22 Juni 2019 Direvisi 6 Juli 2019 Dipublikasikan 4 Agustus 2019

Abstrak. Permukaan di $\mathbb{R}^3$ adalah bagian dari $\mathbb{R}^3$ yang terlihat seperti potongan $\mathbb{R}^2$ di sekitar titik tertentu. Jika untuk setiap titik p di suatu permukaan, terdapat suatu homeomorfisma antara lingkungan di $\mathbb{R}^3$ yang memuat p dan suatu himpunan buka di $\mathbb{R}^2$ serta turunannya di suatu titik bersifat satu-satu, maka permukaan tersebut adalah permukaan regular. Jika terdapat dua permukaan regular atau lebih, maka dapat dikonstruksi suatu pemetaan antara kedua permukaan regular tersebut. Pemetaan yang dimaksud adalah pemetaan terdiferensial.Untuk lebih memahami apa itu permukaan terdiferensial pada permukaan regular, pada makalah ini akan dijelaskan definisi dan beberapa sifat pemetaan terdiferensial pada permukaan regular di $\mathbb{R}^3$ beserta contoh.

Kata Kunci: Terdiferensial, Pemetaan, Permukaan Regular

1. Pendahuluan

Geometri Diferensial pada dasarnya merupakan cabang Matematika yang mempelajari lengkungan, permukaan serta umumnya ruang analitik (*manifold*) yang berdimensi lebih tinggi dan sejenis ataupun beranalogi dengan permukaan[3]. Pada geometri diferensial, terdapat dua objek penting yaitu lengkungan dan permukaan. Pada penelitian kali ini, difokuskan untuk membahas permukaan, tepatnya permukaan regular.

Permukaan di $\mathbb{R}^3$ adalah bagian dari $\mathbb{R}^3$ yang terlihat seperti potongan $\mathbb{R}^2$ di sekitar titik tertentu. Sama seperti permukaan bumi, meskipun sebenarnya tampak hampir bulat, namun jika diperhatikan maka akan terlihat seperti bidang datar. Jika untuk setiap titik di suatu permukaan, terdapat lingkungan di $\mathbb{R}^3$ dan suatu pemetaan yang bersifat terdiferensial, homeomorfisma, dan turunannya di suatu titik bersifat satu-satu, maka permukaan tersebut adalah permukaan regular.

Jika terdapat dua permukaan regular atau lebih, maka dapat dikonstruksi suatu pemetaan antara kedua permukaan regular tersebut. Salah satu implikasi yang diperoleh dari konsep ini adalah equivalensi antara permukaan regular yang dikenal dengan difeomorfisma.

Konsep kekontinuan dan keterdiferensialan merupakan hal yang penting dalam kalkulus baik satu variabel maupun beberapa variabel. Pada makalah ini dibahas bagaimana konsep keterdiferensialan pada suatu permukaan regular.

2. Landasan Teori

2.1. *Kekontinuan di* $\mathbb{R}^m$

Definisi 2.1. *[1] Suatu pemetaan* $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *dikatakan kontinu di* $p \in U$ *jika diberikan* $\epsilon > 0$*, terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga*

$$F(B(p, \delta)) \subset B(F(p), \epsilon).$$

Kemudian pemetaan F dikatakan kontinu jika F kontinu pada setiap titik di U.

Definisi 2.2. *[1] Misalkan pemetaan* $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$*, dikatakan homeomorfisma jika* F *kontinu dan* $F^{-1} : F(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *juga kontinu. Kemudian* U *dan* $F(U)$ *disebut homeomorfik.*

2.2. *Keterdiferensialan di* $\mathbb{R}^m$

Definisi 2.3. *[1] Pemetaan* $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$*, dimana* U *suatu himpunan buka di* $\mathbb{R}^m$*, maka* F *terdiferensial di* $p = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in U$ *jika setiap fungsi komponen* $F(p)$ *terdiferensial di* p*, yaitu*

$$F(x_1, \cdots, x_m) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m)),$$

dimana fungsi f_i*,* $i = 1, \cdots, n$*, memiliki turunan parsial yang kontinu di* p*.*

Proposisi 2.4. *[1]* ***Aturan Rantai untuk Pemetaan*** *Misalkan* $: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *dan* $G : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *adalah pemetaan terdiferensial, dimana* U *dan* V *adalah himpunan buka, sedemikian sehingga* $F(U) \subset V$*. Kemudian* $G \circ F : U \to \mathbb{R}^k$ *adalah pemetaan terdiferensial, dan*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \qquad p \in U.$$

Definisi 2.5. *[3] Jika* $U, V \subset R^m$ *buka dan* $F : U \to V$*, maka* F *disebut difeomorfisma jika* F *terdiferensial dan mempunyai invers* $F^{-1} : V \to U$ *yang juga terdiferensial. Kemudian* U *dan* V *dikatakan difeomorfik.*

Teorema 2.6. *[1]* ***(Teorema Fungsi Invers)*** *Misalkan* $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *adalah pemetaan terdiferensial dan misalkan untuk* $p \in U$*,* dF_p *adalah isomorfisma. Maka terdapat suatu lingkungan* V *dari* p *di* U *dan suatu lingkungan* W *dari* $F(p)$ *di* $\mathbb{R}^m$ *sedemikian sehingga* $F : V \to W$ *mempunyai invers yaitu* $F^{-1} : W \to V$ *yang terdiferensial.*

Bukti. Lihat [1] □

2.3. *Permukaan Regular*

Definisi 2.7. *[1] Himpunan $S \subset R^3$ disebut suatu permukaan regular jika untuk setiap $p \in S$, terdapat lingkungan V di R^3 dan suatu pemetaan $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ dari himpunan buka $U \subset \mathbb{R}^2$ pada $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, sedemikian sehingga*

(1) $\mathbf{x}$ terdiferensial, yaitu didefinisikan sebagai berikut

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U.$$

dimana fungsi $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ memiliki turunan parsial yang kontinu pada U.

(2) $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ homeomorfisma.

(3) Untuk setiap $q \in U$, diferensial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ satu-satu.

Pemetaan $\mathbf{x}$ disebut parameterisasi pada lingkungan dari p. Lingkungan $V \cap S$ dari p di S disebut lingkungan koordinat.

Contoh 2.8. Akan ditunjukkan suatu silinder vertikal yaitu

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

adalah suatu permukaan regular. Misalkan suatu parameterisasi $\mathbf{x}_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ didefinisikan oleh

$$\mathbf{x}_1(y, z) = (\sqrt{1 - y^2}, y, z), (y, z) \in U,$$

dimana $U = \{(y, z) \mid -1 < y < 1\}$.

Pertama akan ditunjukkan kondisi 1 terpenuhi yaitu $\mathbf{x}_1$ terdiferensial. Jelas y dan z mempunyai turunan parsial yang kontinu. Misalkan $\sqrt{1 - y^2} = x$. Perhatikan bahwa

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-2y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

adalah fungsi yang kontinu untuk $-1 < y < 1$. Oleh karena itu, $\mathbf{x}_1$ terdiferensial dan kondisi 1 terpenuhi.

Selanjutnya kondisi 3 terpenuhi karena determinan dari salah satu jacobian tidak sama dengan nol. Kemudian akan dibuktikan kondisi 2 yaitu $\mathbf{x}_1$ homeomorfisma. Berdasarkan kondisi 1 dan 3 diketahui bahwa $\mathbf{x}_1$ terdiferensial dan $d\mathbf{x}_q$ satu-satu. Misalkan $\mathbf{x}_1$ satu-satu dan $\mathbf{x}_1^{-1}$ adalah restriksi dari proyeksi $\pi(x, y, z) = (x, y)$ pada himpunan $\mathbf{x}_1(U)$, maka $\mathbf{x}_1^{-1}$ kontinu pada $\mathbf{x}_1(U)$. Karena $\mathbf{x}_1(U)$ hanya menyelimuti C pada bagian depan, maka dibutuhkan parameterisasi lain sehingga C terselimuti secara keseluruhan.

Definisikan

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2(x, y) &= (-\sqrt{1 - y^2}, y, z), \\
\mathbf{x}_3(x, z) &= (x, \sqrt{1 - x^2}, z), \\
\mathbf{x}_4(x, z) &= (x, -\sqrt{1 - x^2}, z).
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada $\mathbf{x}_1$ atau $\mathbf{x}_2$, diperoleh parameterisasi pada bidang (x, y) memenuhi kondisi 1, 2, dan 3 pada Definisi 2.7 serta

$\mathbf{x}_1(U)$ sampai $\mathbf{x}_4(U)$ menyelimuti C secara keseluruhan. Akibatnya, C adalah suatu permukaan regular.

3. Pembahasan

3.1. *Pemetaan Terdiferensial pada Permukaan Regular*

Definisi dari keterdiferensialan dapat diperluas menjadi pemetaan terdiferensial antara permukaan regular.

Definisi 3.1. *[1] Misalkan S_1, S_2 suatu permukaan regular. Suatu pemetaan kontinu $\varphi : S_1 \to S_2$ dikatakan terdiferensial di $p \in S_1$, jika terdapat himpunan buka $\mathbf{x}_1(U_1)$ yang memuat p dan himpunan buka $\mathbf{x}_2(U_2)$ yang memuat $\varphi(p)$ dengan*

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1 \qquad \mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2,$$

sedemikian sehingga $\varphi(\mathbf{x_1}(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$, pemetaan

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \to U_2$$

terdiferensial pada U_1.

Contoh 3.2. Suatu pemetaan kontinu $\varphi : S^2 \to M_g$ didefinisikan oleh $\varphi(x, y, z) = (xa, yb, zc)$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan φ terdiferensial di $p \in S_1$ dengan menunjukkan $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \to U_2$ terdiferensial di U_1. Misalkan diberikan parameterisasi

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S^2, \mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to M_g,$$

dengan $\mathbf{x}_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$ dimana $(x, y) \in U_1$ dan $U_1 = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + y_1^2 < 1\}$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1(x, y) &= \mathbf{x}_2^{-1}(\varphi(\mathbf{x}_1(x, y))) \\ &= \mathbf{x}_2^{-1}(\varphi(x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})) \\ &= \mathbf{x}_2^{-1}(xa, yb, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}) \\ = (xa, yb). \end{aligned}$$

Jelas xa dan xb mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik x dan y, maka $(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1)$ terdiferensial pada U_1. Oleh karena itu, φ terdiferensial di $p \in S_1$.

Contoh 3.3. Misalkan pemetaan kontinu $\varphi : M_g \to C$ yang didefinisikan oleh

$$\varphi(x, y, z) = (x, x + y, zx).$$

Akan ditunjukkan φ terdiferensial di $p \in M_g$ dengan menunjukkan $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \to U_2$ terdiferensial di U_1. Misalkan diberikan parameterisasi

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to M_g, \mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to C,$$

dengan $\mathbf{x}_1(x, y) = (x, y, g(x, y))$ dan $\mathbf{x}_2(x, z) = (x, \sqrt{1 - x^2}, z)$ jika dan hanya jika $\mathbf{x}_2^{-1}(x, \sqrt{1 - x^2}, z) = (x, z)$, dimana $U_2 = \{(x, z) \mid |x| < 1\}$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1(x,y) &= \mathbf{x}_2^{-1}(\varphi(\mathbf{x}_1(x,y))) \\ &= \mathbf{x}_2^{-1}(\varphi(x,y,g(x,y))) \\ &= \mathbf{x}_2^{-1}(x, x+y, xg(x,y)) \\ &= (x, xg(x,y)).\end{aligned}$$

Jelas x dan $xg(x,y)$ terdiferensial di x dan y maka $(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1)$ terdiferensial pada U_1. Oleh karena itu, φ terdiferensial di $p \in M_g$.

Teorema 3.4. *[2] Misalkan $\varphi_1 : S_1 \to S_2$ dan $\varphi_2 : S_2 \to S_3$ adalah pemetaan terdiferensial, dimana S_1, S_2, S_3 suatu permukaan regular. Maka pemetaan komposisi $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1 : S_1 \to S_3$ juga terdiferensial.*

Bukti. Misalkan S_1, S_2, S_3 suatu permukaan regular dan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ suatu parameterisasi dari S_1, S_2, S_3 yang didefinisikan oleh

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1,\ \mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2,\ \mathbf{x}_3 : U_3 \subset \mathbb{R}^2 \to S_3,$$

dimana U_1, U_2, U_3 himpunan buka di $\mathbb{R}^2$. Akan dibuktikan φ_3 terdiferensial di S_1.

Misalkan $\varphi_1 : S_1 \to S_2$, $\varphi_2 : S_2 \to S_3$ adalah pemetaan terdiferensial dan misalkan $p \in S_1$. Karena φ_2 terdiferensial, maka $\mathbf{x}_3^{-1} \circ \varphi_2 \circ \mathbf{x}_2 : U_2 \to U_3$ terdiferensial. Karena φ_1 terdiferensial, maka $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi_1 \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \to U_2$ terdiferensial dan φ_1 kontinu. Akibat dari φ_1 kontinu, $\varphi_1^{-1}(\mathbf{x}_2(U_2))$ adalah lingkungan dari $p \in S_1$, maka terdapat himpunan buka $\mathbf{x}_1(U_1) \subset S_1$, sedemikian sehingga $p \in \mathbf{x}_1(U_1) \subset \varphi_1^{-1}(\mathbf{x}_2(U_2))$. Kemudian $\varphi_2 \circ (\varphi_1(\mathbf{x}_1(U_1))) \subset \varphi_2(\mathbf{x}_2(U_2)) \subset \mathbf{x}_3(U_3)$ dan

$$\mathbf{x}_3^{-1} \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ \mathbf{x}_1 = (\mathbf{x}_3^{-1} \circ \varphi_2 \circ \mathbf{x}_2) \circ (\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \mathbf{x}_1) : U_1 \to U_3$$

terdiferensial karena komposisi dari pemetaan terdiferensial. Terbukti φ_3 terdiferensial di S_1. □

Contoh 3.5. Misalkan $\varphi_1 : S^2 \to M_g$ dan $\varphi_2 : M_g \to C$ terdiferensial dengan $\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = (x_1 a, y_1 b, z_1 c)$ dan $\varphi_2(x_2, y_2, z_2) = (x_2, x_2 + y_2, z_2 x_2)$. Akan ditunjukkan $\varphi_2 \circ \varphi_1 : S^2 \to C$ juga terdiferensial. Karena φ_1 dan φ_2 terdiferensial maka berdasarkan Teorema 3.4, $\varphi_2 \circ \varphi_1$ juga terdiferensial.

Misalkan $p = (x_1, y_1, z_1) \in S^2$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\varphi_2 \circ \varphi_1(x_1, y_1, z_1) &= \varphi_2(x_1 a, y_1 b, z_1 c), \\ &= (x_1 a, x_1 a + y_1 b, (z_1 c)(x_1 a)).\end{aligned}$$

Karena $(x_1 a, x_1 a + y_1 b, (z_1 c)(x_1 a))$ mempunyai turunan parsial yang kontinu, maka $\varphi_2 \circ \varphi_1$ terdiferensial.

Teorema fungsi invers dapat diperluas pada pemetaan terdiferensial antara permukaan regular. Hal ini mengakibatkan terdapat suatu sifat dari pemetaan terdiferensial antara permukaan regular yaitu difeomorfisma lokal. Untuk itu, didefinisikan suatu difeomorfisma lokal.

Definisi 3.6. *[1] Misalkan S_1 dan S_2 adalah permukaan regular. Suatu pemetaan $\varphi : U \subset S_1 \to S_2$ adalah difeomorfisma lokal di $p \in U$ jika terdapat suatu lingkungan $V \subset U$ di p sedemikian sehingga $\varphi : V \to \varphi(V)$ adalah difeomorfisma.*

Proposisi 3.7. *[1] Jika S_1 dan S_2 adalah permukaan regular dan $\varphi : U \subset S_1 \to S_2$ adalah pemetaan terdiferensial pada himpunan buka $U \subset S_1$ sedemikian sehingga $d\varphi_p$ adalah isomorfisma, maka φ adalah difeomorfisma lokal di p.*

Bukti. Dengan menggunakan Teorema 2.6, karena φ terdiferensial dan dφ_p suatu isomorfisma maka terdapat lingkungan V dari p di U dan lingkungan $\varphi(V)$ dari $\varphi(p)$ di S_2 sedemikian sehingga $\varphi : V \to \varphi(V)$ terdiferensial dan mempunyai $\varphi^{-1} : W \to \varphi(V)$ yang terdiferensial. Karena φ dan φ^{-1} terdiferensial maka φ difeomorfisma, sedemikian sehingga φ difeomorfisma lokal di $p \in U$. □

Contoh 3.8. Misalkan C dan S^2 suatu permukaan regular. Diberikan pemetaan terdiferensial $\varphi : U \subset C \to S^2$ dengan $\varphi(x, y, z) = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$ dimana $U = \{(x, y, z) \mid |x| < 1\}$. Misalkan $p \in U$, akan dibuktikan φ difeomorfisma lokal di $p \in U$.

Misalkan $p \in U$. Pertama akan ditunjukkan $d\varphi_p$ isomorfisma dengan menunjukkan $\det(d\varphi_p) \neq 0$. Karena $\det(d\varphi(p)) \neq 0$, maka $d\varphi(p)$ satu-satu. Oleh karena itu, $d\varphi_p$ isomorfisma. Berdasarkan Teorema 2.6, $\varphi : V \to \varphi(V)$ terdiferensial dan mempunyai $\varphi^{-1} : W \to \varphi(V)$ yang terdiferensial. Karena φ dan φ^{-1} terdiferensial maka φ difeomorfisma, sedemikian sehingga φ difeomorfisma lokal di $p \in U$.

4. Kesimpulan

Dari pembahasan pada tugas akhir ini diperoleh kesimpulan yaitu jika diketahui S_1, S_2, S_3 suatu permukaan regular, $\varphi_1 : S_1 \to S_2$ dan $\varphi_2 : S_2 \to S_3$ yang terdiferensial, maka $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1 : S_1 \to S_3$ juga terdiferensial. Kemudian jika S_1 dan S_2 adalah permukaan regular dan $\varphi : U \subset S_1 \to S_2$ adalah pemetaan terdiferensial pada himpunan buka $U \subset S_1$ sedemikian sehingga $d\varphi_p$ adalah isomorfisma, maka φ adalah difeomorfisma lokal di p.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. I Made Arnawa, Bapak Efendi, M.Si, dan Bapak Dr. Dodi Devianto yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Carmo, M. P. do. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surface*. Prentice-Hall, New Jersey.
[2] Montiel, Sebastian dan Antonio Ros. 2005. *Curves and Surfaces*. American Mathematical Society, United Stated of America.
[3] Pranoto, Iwan. 2004. *Pengenalan Geometri Differensial*. Institut Teknologi Bandung, Bandung.
[4] Pressley, Andrew. 2001. *Elementary Differential Geometry*. Springer, London.