Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **2** Hal. 15 – 21
Edisi Agustus 2019
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

# HUBUNGAN ANTARA UKURAN-UKURAN INFORMASI PADA HIMPUNAN KABUR *HESITANT*

ATIKAH MAITRI, YANITA

*Program Studi S1 Matematika,*
*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,*
*Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.*
*email : atikahmaitri05@gmail.com*

Diterima 22 Juni 2019 Direvisi 6 Juli 2019 Dipublikasikan 4 Agustus 2019

**Abstrak.** Himpunan kabur diperkenalkan oleh Zadeh [1] pada tahun 1965 untuk mengatasi masalah ketidakpastian. Dengan berkembangnya ilmu pengetahuan, beberapa bentuk perluasan dari himpunan kabur telah diusulkan salah satunya adalah himpunan kabur *hesitant* yang diperkenalkan oleh Torra [2]. Topik kajian yang cukup banyak dikaji pada himpunan kabur diantaranya adalah ukuran entropi, ukuran jarak, dan ukuran kesamaan dinamakan dengan ukuran informasi. Pada penelitian ini dikaji hubungan antara ukuran-ukuran informasi pada himpunan kabur *hesitant*.

*Kata Kunci*: Himpunan Kabur *hesitant*, Ukuran Jarak, Ukuran Kesamaan, Ukuran Entropi, Uukuran Informasi

## 1. Pendahuluan

Teori himpunan kabur diperkenalkan oleh Zadeh pada tahun 1965 [1] untuk mengatasi masalah ketidakpastian. Seiring berkembangnya pengetahuan, muncul beberapa bentuk perluasan dari teori himpunan kabur sebelumnya, salah satunya adalah himpunan kabur *hesitant*. Himpunan kabur *hesitant* (*HFS*) diperkenalkan oleh Torra pada tahun 2010 dengan nilai keanggotaan yang merupakan himpunan dari beberapa nilai pada interval $[0, 1]$ [2]. Setiap anggota pada *HFS* memiliki elemen kabur *hesitant* (*HFE*) yang dijelaskan oleh Xu dan Xia pada tahun 2011 sebagai nilai keanggotaan dari elemen *HFS* tersebut [3].

Topik kajian yang cukup banyak dikaji ada himpunan kabur, diantaranya yaitu ukuran jarak, ukuran kesamaan, dan ukuran entropi yang dinamakan dengan ukuran informasi. Ukuran jarak pada himpunan kabur menggambarkan ketidakmiripan antara himpunan kabur. Ukuran kesamaan pada himpunan kabur menggambarkan tingkat kemiripan antara himpunan kabur, sedngakan ukuran entropi dari himpunan kabur menggambarkan tingkat ketidakjelasan dari himpunan kabur. Ukuran kesamaan dan ukuran jarak telah diaplikasikan ke dalam berbagai aspek kehidupan salah satunya yaitu pengambilan keputusan berkelompok yang dijelaskan pada [4]. Penggunaan ukuran jarak yang akan digunakan pada penelitian

ini yaitu jarak Hamming *hesitant* yang dinormalkan yang telah didefinisikan oleh Farhadinia pada tahun 2013 [5].

Ukuran kesamaan dan ukuran jarak pada *HFS* telah diperkenalkan oleh Xu dan Xia pada tahun 2011 [6]. Selanjutnya pada tahun 2012 Xu dan Xia juga telah mendefinisikan ukuran entropi pada *HFE* [7]. Pada penelitian kali ini akan dibahas mengenai hubungan antara ukuran jarak, ukuran kesamaan, dan ukuran entropi pada *HFS* tersebut dengan menggunkan jarak Hamming *hesitant* yang dinormalkan.

## 2. Landasan Teori

Misalkan X adalah suatu himpunan semesta.

### 2.1. *Himpunan Kabur Hesitant*

**Definisi 2.1.** *[1] Misalkan X suatu himpunan yang tak kosong. Himpunan kabur A atas X didefinisikan sebagai:*

$$A = \{(x, \mu_A(x))|x \in X\}, \tag{2.1}$$

*dimana* $\mu_A : X \to [0, 1]$*, dan* $\mu_A(x)$ *disebut nilai keanggotaan atas X pada himpunan kabur A.*

**Definisi 2.2.** *[1] Misalkan X adalah himpunan semesta yang tak kosong. Himpunan kabur hesitant (HFS) B atas X adalah:*

$$B = \{(x, \nu_B(x)) \mid x \in X\}, \tag{2.2}$$

*dimana* $\nu_B$ *adalah himpunan beberapa nilai yang berbeda pada [0,1], yang mewakili kemungkinan nilai keanggotaan elemen* $x \in X$ *ke himpunan B. Dalam hal ini dapat ditulis* $\nu_B(x) = \{\gamma \in [0, 1]|\gamma$ *adalah nilai keanggotaan dari* $x \in X\}$*. Himpunan* $\nu_B(x)$ *disebut sebagai* Hesitant Fuzzy Element *(HFE).*

### 2.2. *Fungsi Skor Pada Himpunan Kabur Hesitant*

Misalkan *HFE* pada dua himpunan kabur *hesitant A* dan *B* yang berbeda memiliki banyak nilai keanggotaan yang berbeda. Misalkan $l(\nu_A(x))$ adalah jumlah nilai dalam $\nu_A(x)$. $\nu_A^{\sigma(j)}(x)$ merupakan nilai terbesar ke-j dalam $\nu_A(x)$. Jika untuk beberapa $x \in X$, $l(\nu_A(x)) \neq l(\nu_B(x))$, maka $l_x = max\{l(\nu_A(x)),l(\nu_B(x))\}$. Untuk memiliki perbandingan yang benar kedua *HFE* yaitu $\nu_A(x)$ dan $\nu_B(x)$ harus memiliki panjang yang sama ($l_x$). Jika banyak nilai keanggotaan $\nu_A(x)$ lebih sedikit dari $\nu_B(x)$ maka panjang dari $\nu_A(x)$ harus dipertimbangkan dengan cara mengulangi elemen maksimumnya sehingga memiliki panjang yang sama dengan $\nu_B(x)$ [1].

**Definisi 2.3.** *[1] Misalkan A dan B adalah dua HFS atas X.* $A \leq B$ *jika dan hanya jika* $skor(A) \leq skor(B)$*. Fungsi skor dari suatu himpunan kabur hesitant A atas X didefinisikan sebagai berikut:*

$$skor(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{l_{x_i}}\sum_{j=1}^{l_{x_i}}\nu_A^{\sigma(j)}(x_i)\right). \tag{2.3}$$

### 2.3. *Ukuran Informasi Himpunan Kabur Hesitant*

**Definisi 2.4.** *[1]* [4] *Misalkan HFS(X) adalah himpunan dari semua himpunan kabur hesitant. Misalkan A,B dan C adalah HFS pada X. Suatu fungsi bernilai rill* $d : HFS(X) \times HFS(X) \longrightarrow [0,1]$ *dikatakan ukuran jarak untuk HFS jika d memenuhi sifat-sifat berikut ini:*

*(1)* $0 \leq d(A,B) \leq 1$*;*
*(2)* $d(A,B) = d(B,A)$*;*
*(3)* $d(A,A^c) = 1$ *jika dan hanya jika A adalah HFS kosong* $\{\overline{0}\}$ *atau HFS penuh* $\{\overline{1}\}$*;*
*(4)* $d(A,B) = 0$ *jika dan hanya jika* $A = B$*;*
*(5) Jika* $A \leq B \leq C$*, maka* $d(A,B) \leq d(A,C)$ *dan* $d(B,C) \leq d(A,C)$*,*

*Misalkan* $A^c = \{(x, \nu_A^c(x) = \bigcup_{\gamma \in \nu_A(x)}\{1-\gamma\}) \mid x \in X\}$ *adalah himpunan komplemen dari HFS A dan* $A = \{(x,k)|x \in X\}$ *yang dinotasikan dengan* $A = \{\overline{k}\}$*, dimana k adalah bilangan riil pada interval* $[0,1]$*.*

**Definisi 2.5.** *[4] Misalkan HFS(X) adalah himpunan dari semua himpunan kabur hesitant. Misalkan A,B dan C adalah HFS pada X. Suatu fungsi bernilai rill* $S : HFS(X) \times HFS(X) \longrightarrow [0,1]$ *dikatakan ukuran kesamaan untuk HFS jika S memenuhi sifat-sifat berikut ini::*

*(1)* $0 \leq S(A,B) \leq 1$*;*
*(2)* $S(A,B) = S(B,A)$*;*
*(3)* $S(A,A^c) = 0$ *jika* $A = \{\overline{0}\}$ *atau* $A = \{\overline{1}\}$*;*
*(4)* $S(A,B) = 1$ *jika dan hanya jika* $A = B$*;*
*(5) Jika* $A \leq B \leq C$*, maka* $S(A,C) \leq S(A,B)$ *dan* $S(A,C) \leq S(B,C)$*.*

**Proposisi 2.6.** [4] *Misalkan HFS(X) adalah himpunan dari semua himpunan kabur hesitant. Misalkan A dan B adalah HFS pada X, maka berlaku:*

$$S(A,B) = 1 - d(A,B) \tag{2.4}$$

**Definisi 2.7.** [4] *Misalkan HFS(X) adalah himpunan dari semua himpunan kabur hesitant. Misalkan A adalah HFS pada X. Suatu fungsi bernilai rill* $E_d : HFS(X) \longrightarrow [0,1]$ *dikatakan ukuran entropi untuk HFS jika* $E_d$ *memenuhi sifat-sifat berikut ini:*

*(1)* $0 \leq E_d(A) \leq 1$*;*
*(2)* $E_d(A) = 0$ *jika dan hanya jika* $A = \{\overline{0}\}$ *atau* $A = \{\overline{1}\}$*;*
*(3)* $E_d(A) = 1$ *jika dan hanya jika* $A = \left\{\frac{\overline{1}}{2}\right\}$*;*
*(4)* $E_d(A) = E_d(A^c)$*;*
*(5) Jika* $d\left(A, \left\{\frac{\overline{1}}{2}\right\}\right) \geq d\left(B, \left\{\frac{\overline{1}}{2}\right\}\right)$*, maka* $E_d(A) \leq E_d(B)$*.*

**Definisi 2.8.** [1] *Misalkan A dan B dua HFS dengan HFE masing-masing yaitu* $\nu_A^{\sigma(j)}(x_i)$ *dan* $\nu_B^{\sigma(j)}(x_i)$*. Jarak Hamming hesitant yang dinormalisasi disimbolkan*

*dengan $d_{hnh}$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$d_{hnh}(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{l_{x_i}}\sum_{j=1}^{l_{x_i}} \mid \nu_A^{\sigma(j)}(x_i) - \nu_B^{\sigma(j)}(x_i) \mid\right] \tag{2.5}$$

.

## 3. Pembahasan

Pada bagian ini akan dijelaskan hubungan antara ukuran-ukuran informasi pada himpunan kabur *hesitant*.

### 3.1. *Transformasi Ukuran Jarak ke Ukuran Kesamaan pada Himpunan Kabur Hesitant*

**Teorema 3.1.** [4] *Misalkan $Z : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ adalah suatu fungsi monoton turun murni, dan d adalah ukuran jarak antara dua HFS. HFS(X) adalah kumpulan dari himpunan-himpunan kabur hesitant. Maka ukuran kesamaaan antara HFS A dan B atas X yang bersesuaian dengan ukuran jarak adalah*

$$S_d(A,B) = \frac{Z(d(A,B)) - Z(1)}{Z(0) - Z(1)}. \tag{3.1}$$

.

**Bukti.** Misalkan $A, B \in$ *HFS(X)*. Akan dibuktikan $S_d(A,B)$ memenuhi sifat ukuran kesamaan pada Definisi 2.5. Jelas bahwa $S_d(A,B)$ merupakan suatu ukuran kesamaan dengan menggunakan Definisi 2.4 dan sifat monoton turun murni dari fungsi $Z$. □

### 3.2. *Transformasi Ukuran Jarak ke Ukuran Entropi pada Himpunan Kabur Hesitant*

**Teorema 3.2.** [4] *Misalkan $Z : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ adalah suatu fungsi monoton turun murni, dan $d_{hnh}$ adalah ukuran jarak Hamming hesitant yang dinormalisasi. HFS(X) adalah kumpulan dari humpunan-himpunan kabur hesitant. Maka entropi untuk suatu HFS A atas X yang bersesuain dengan ukuran jarak adalah*

$$E_{d_{hnh}}(A) = \frac{Z\left(2d_{hnh}\left(A, \left\{\overline{\frac{1}{2}}\right\}\right)\right) - Z(1)}{Z(0) - Z(1)} \tag{3.2}$$

.

**Bukti.** Misalkan $A \in$ *HFS(X)*. Akan ditunjukkan $E_{d_{hnh}}(A)$ memenuhi sifat ukuran entropi pada Definisi 2.7.

1. $0 \leqslant E_{d_{hnh}}(A,B) \leqslant 1$ dengan menggunakan sifat monoton turun murni dari fungsi $Z$.

2. Akan ditunjukkan $E_{d_{hnh}}(A) = 0$ jika dan hanya jika $A = \{\overline{0}\}$ atau $A = \{\overline{1}\}$.
   ($\Rightarrow$) Misalkan $E_{d_{hnh}}(A) = 0$. Akan ditunjukkan $A = \{\overline{0}\}$ atau $A = \{\overline{1}\}$.
   Dengan menggunakan sifat monoton turun murni dari $Z$ diperoleh,

$$d_{hnh}\left(A, \left\{\frac{\overline{1}}{2}\right\}\right) = \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

   Selanjutnya, subtitusi persamaan (3.3) ke definisi $d_{hnh}$ dan diperoleh $A = \{\overline{1}\}$.
   ($\Leftarrow$) Misalkan $A = \{\overline{0}\}$ atau $A = \{\overline{1}\}$. Akan ditunjukkan $E_{d_{hnh}}(A) = 0$. Akan ditunjukkan $E_{d_{hnh}}(A) = 0$.
   (a) Untuk $A = \{\overline{0}\}$.

$$\begin{aligned} E_{d_{hnh}}(\{\overline{0}\}) &= \frac{Z\left(2d_{hnh}\left(\{\overline{0}\}, \left\{\frac{\overline{1}}{2}\right\}\right)\right) - Z(1)}{Z(0) - Z(1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

   (b) Untuk $A = \{\overline{1}\}$ cara sama dengan (a).
3. Akan ditunjukkan $E_{d_{hnh}}(A) = 1$ jika dan hanya jika $A = \left\{\frac{\overline{1}}{2}\right\}$.
   ($\Rightarrow$) Misalkan $E_{d_{hnh}}(A) = 1$. Karena $Z$ merupakan fungsi monoton turun murni, maka $Z$ fungsi satu-satu, diperoleh

$$A = \left\{\frac{\overline{1}}{2}\right\}.$$

   ($\Leftarrow$) Misalkan $A = \left\{\frac{\overline{1}}{2}\right\}$. Akan ditunjukkan $E_{d_{hnh}}(A) = 1$ dengan menggunakan sifat fungsi dari $Z$, sehinggga diperoleh

$$E_{d_{hnh}}(A) = 1.$$

4. Akan ditunjukkan $E_{d_{hnh}}(A) = E_{d_{hnh}}(A^c)$.
   Subtitusi nilai dari ukuran jarak ke $E_{d_{hnh}}(A)$, sehingga diperoleh $E_{d_{hnh}}(A) = E_{d_{hnh}}(A^c)$.
5. Jika $d_{hnh}\left(A, \left\{\frac{\overline{1}}{2}\right\}\right) \geq d_{hnh}\left(B, \left\{\frac{\overline{1}}{2}\right\}\right)$ maka $E_{d_{hnh}}(A) \leq E_{d_{hnh}}(B)$
   dengan menggunakan sifat monoton turun murni dari fungsi $Z$ maka terbukti $E_{d_{hnh}}(A) \leqslant E_{d_{hnh}}(B)$ . □

## 3.3. *Transformasi Ukuran Kesamaan ke Ukuran Entropi pada Himpunan Kabur Hesitant*

**Teorema 3.3.** [4] *Misalkan* $Z : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *adalah suatu fungsi pada yang monoton turun murni, dan* $S_{d_{hnh}}$ *adalah ukuran kesamaan antara dua HFS. HFS(X) adalah kumpulan dari humpunan-himpunan kabur hesitant. Maka entropi untuk suatu HFS A atas X yang bersesuaian dengan ukuran kesamaan adalah*

$$E_{d_{hnh}}(A) = \frac{Z\left(2Z^{-1}\left(S_{d_{hnh}}\left(A, \left\{\frac{\overline{1}}{2}\right\}\right)\right)\right) - Z(1)}{Z(0) - Z(1)} \tag{3.4}$$

.

**Bukti.** Misalkan $A, B \in HFS(X)$. Akan dibuktikan $E_{d_{hnh}}(A)$ memenuhi sifat ukuran entropi pada Definisi 2.7 dengan menggunakan sifat pada dan monoton turun murni dari fungsi $Z$, jelas bahwa $E_{d_{hnh}}(A)$ merupakan suatu ukuran entropi karena persamaan yang diperoleh sama dengan persamaan (3.2) pada Teorema 3.2 maka jelas $E_{d_{hnh}}(A)$ memenuhi sifau-sifat pada Definisi 2.7. □

## 4. Kesimpulan

Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa:

1. Suatu hubungan antara ukuran jarak dengan ukuran kesamaan pada himpunan kabur *hesitant* dapat dinyatakan sebagai
$$S_d(A, B) = \frac{Z(d(A, B)) - Z(1)}{Z(0) - Z(1)}.$$
2. Suatu hubungan antara ukuran jarak dengan ukuran entropi pada himpunan kabur *hesitant* dengan menggunakan jarak Hamming *hesitant* yang dinormalkan dapat dinyatakan sebagai
$$E_{d_{hnh}}(A) = \frac{Z\left(2d_{hnh}\left(A, \left\{\overline{\frac{1}{2}}\right\}\right)\right) - Z(1)}{Z(0) - Z(1)}.$$
3. Suatu hubungan antara ukuran kesamaan dengan ukuran entropi pada himpunan kabur *hesitant* dengan menggunakan jarak Hamming *hesitant* yang dinormalkan dapat dinyatakan sebagai
$$E_{d_{hnh}}(A) = \frac{Z\left(2Z^{-1}\left(S_{d_{hnh}}\left(A, \left\{\overline{\frac{1}{2}}\right\}\right)\right)\right) - Z(1)}{Z(0) - Z(1)}.$$

## 5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Admi Nazra, Nova Noliza Bakar, M,Si, Prof. Dr. I Made Arnawa, dan Dr. Mahdhivan Syafwan yang telah memberikan masukan dan saran sehingga jurnal ini dapat diselesaikan dengan baik.

## Daftar Pustaka

[1] Farhadinia, B. 2013. Information measure for hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets. *Information Sciences*. **240**: 129 – 144
[2] Liu, X.C. 1992. Entropy distance and similarity measure of fuzzy sets and their relation. *Fuzzy Sets and System*. **52**: 305 – 318.
[3] Luca, A. de dan S. Termini. 1972. A definition of nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory, *Inf. Control*. **20**: 301 – 312
[4] Torra, V. 2010. Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent System*. **25**: 529 – 539
[5] Xu, Z dan M. Xia. 2011. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*. **52**: 395 – 407
[6] Xu, Z dan M. Xia. 2011. Distance and similarity measure for hesitant fuzzy sets. *Information Sciences*. **181**: 2128 – 2138

[7] Xu, Z dan M. Xia. 2012. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multiattribute decision-making. *International Journal of Intelligent System.* **27**: 799 – 822

[8] Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy sets. *Information and Computation.* **8**: 338 – 353