INTERPOLASI SPLIN KUBIK TERAPIT

VISCA AMELIA S, MAHDHIVAN SYAFWAN, ARRIVAL RINCE PUTRI

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : viscaamelias@gmail.com*

Diterima 22 Juni 2019 Direvisi 6 Juli 2019 Dipublikasikan 4 Agustus 2019

Abstrak. Dalam makalah ini dibahas penurunan interpolasi splin kubik untuk kasus syarat batas terapan dengan lebar selang sebarang. Interpolasi jenis ini digunakan untuk mengaproksimasi data dimana kemiringan di titik-titik ujung data diketahui. Dari hasil simulasi diperoleh hasil interpolasi yang cukup baik dalam mengaproksimasi kelulusan kurva dari data sebenarnya.

Kata Kunci: Interpolasi Splin Kubik, Batas Terapan

1. Pendahuluan

Salah satu masalah umum yang sering ditemukan dalam pembuatan desain grafik, hubungan antar variabel, dan analisis masalah nilai takstiran dari suatu interval, adalah masalah pencocokan kurva (*curve fitting*). Salah satu teknik pencocokan kurva dalam metode numerik adalah interpolasi. Suatu kurva dikatakan menginterpolasi suatu kumpulan titik data apabila kurva tersebut melewati semua titik tersebut sedemikian sehingga dapat ditaksir nilai suatu titik yang tidak berada dalam sekumpulan titik tersebut, namun masih berada dalam rentang titik data yang diberikan [3].

Kurva interpolasi dapat dibangun oleh suatu fungsi polinomial. Semakin banyak titik data yang diberikan, akan semakin tinggi orde polinomial yang digunakan untuk menginterpolasi titik-titik data tersebut. Namun hal ini harus dibayar dengan beban komputasi yang semakin berat.

Pendekatan alternatif yang dapat digunakan dalam teknik interpolasi adalah dengan menerapkan polinomial orde rendah terhadap subkumpulan titik data [2]. Interpolasi ini disebut dengan *interpolasi splin*. Terdapat tiga jenis interpolasi splin, yaitu interpolasi splin linier, interpolasi splin kuadratik dan interpolasi splin kubik. Dari ketiga jenis interpolasi splin tersebut, interpolasi splin kubik lebih sering digunakan karena memberikan aproksimasi hasil yang lebih mulus [2].

Interpolasi splin kubik terdiri dari beberapa jenis berdasarkan syarat batasnya, yaitu splin kubik alami (*natural spline*), splin kubik berujung parabolik (*parabolic*

runout spline), splin kubik berujung pangkat tiga (*cubic runout spline*), splin kubik periodik (*periodic spline*) dan splin kubik terapat (*clamped spline*) [1]. Dalam makalah ini akan dibahas secara khusus interpolasi splin kubik terapat untuk lebar selang sebarang, dengan mengulas kembali referensi [1].

2. Konstruksi Splin Kubik

Definisi 2.1. [2] Misalkan diberikan n buah titik data $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, dimana $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Fungsi $S(x)$ disebut **splin kubik** jika terdapat n polinomial orde tiga $S_i(x)$ dengan koefisien a_i, b_i, c_i dan d_i yang memenuhi sifat:

- (1) $S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$ untuk $x \in [x_i, x_{i+1}]$ dan $i = 1, 2, \dots, n-1$.
- (2) $S(x_i) = y_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ ($S(x)$ melewati seluruh titik data yang diketahui).
- (3) $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$ untuk $i = 1, 2, \dots, n-2$ ($S(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$).
- (4) $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$ untuk $i = 1, 2, \dots, n-2$ ($S'(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$).
- (5) $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$ untuk $i = 1, 2, \dots, n-2$ ($S''(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$).

Dari definisi di atas dapat dikatakan bahwa $S(x)$ merupakan polinomial orde tiga yang dapat ditulis sebagai berikut.

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ S_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3, \\ \vdots \\ S_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases} \quad (2.1)$$

dimana

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad (2.2)$$

dengan a_i, b_i, c_i dan d_i merupakan koefisien yang nilai-nilainya akan dicari. Koefisien-koefisien tersebut dipilih sedemikian sehingga terdapat n titik yang diinterpolasi oleh fungsi $S(x)$ dimana $S(x)$, $S'(x)$ dan $S''(x)$ bersifat kontinu.

Berikut merupakan teorema yang memberikan nilai-nilai dari koefisien a_i, b_i, c_i dan d_i .

Teorema 2.2. [1] (*Interpolasi Splin Kubik*) Jika diberikan n titik data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ dengan $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, maka splin kubik yang menginterpolasi titik-titik tersebut, yaitu

$$S(x) = \begin{cases} a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (2.3)$$

memiliki koefisien-koefisien yang dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}, \\ b_i &= \frac{M_i}{2}, \\ c_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \left[\frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} \right] h_i, \\ d_i &= y_i, \end{aligned} \quad (2.4)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$, dimana $M_i = S''(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Perhatikan bahwa nilai-nilai koefisien a_i, b_i, c_i dan d_i bergantung pada nilai M_i , $i = 1, 2, \dots, n$ yang belum diketahui. Nilai-nilai M_i pada persamaan (2.4) dapat dicari dengan mensubstitusikan koefisien a_i, b_i dan c_i , ke dalam persamaan yang diperoleh pada sifat V, sehingga akan diperoleh persamaan

$$\Leftrightarrow 6 \left[\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \right] = h_i M_i + 2(h_i + h_{i+1})M_{i+1} + h_{i+1}M_{i+2}, \quad (2.5)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Persamaan (2.5) dapat ditulis kembali sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 6 \left[\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \right] &= h_1 M_1 + 2(h_1 + h_2)M_2 + h_2 M_3, \\ 6 \left[\frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \right] &= h_2 M_2 + 2(h_2 + h_3)M_3 + h_3 M_4, \\ &\vdots \\ 6 \left[\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \right] &= h_{n-3} M_{n-3} + 2(h_{n-3} + h_{n-2})M_{n-2} + h_{n-2} M_{n-1}, \\ 6 \left[\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \right] &= h_{n-2} M_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})M_{n-1} + h_{n-1} M_n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dalam bentuk matriks,

$$H_{(n-2) \times n} \mathbf{m}_{n \times 1} = \mathbf{6k}_{(n-2) \times 1}, \quad (2.7)$$

dimana

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}, \text{ dan } \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_2} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}.$$

Sistem linier (2.7) terdiri dari $n - 2$ persamaan dengan n variabel $M_1, M_2, \dots, M_n$. Untuk memperoleh solusi tunggal untuk $M_1, M_2, \dots, M_n$, dibutuhkan dua persamaan tambahan. Dua persamaan tambahan tersebut bergantung pada jenis splin kubik yang didefinisikan oleh syarat batasnya. Dalam makalah ini akan digunakan syarat batas terapan.

3. Splin Terapan

Splin terapan yang menginterpolasi titik-titik $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ memenuhi syarat batas berikut :

$$S'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{h_1}, \quad (3.1)$$

$$S'(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}. \quad (3.2)$$

Dari syarat batas (3.1) diperoleh persamaan tambahan:

$$\begin{aligned} M_2 + 2M_1 &= 0, \text{ atau} \\ S''(x_2) + 2S''(x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Selanjutnya, dari syarat batas (3.2) didapatkan:

$$\begin{aligned} 2M_n + M_{n-1} &= 0, \text{ atau} \\ 2S''(x_n) + S''(x_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dari persamaan (2.6) dan dengan menambahkan dua syarat batas (3.3) dan (3.4) dapat dibuat hubungan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 0 &= 2M_1 + M_2, \\ 6 \left[\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \right] &= h_1 M_1 + 2(h_1 + h_2)M_2 + h_2 M_3, \\ 6 \left[\frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \right] &= h_2 M_2 + 2(h_2 + h_3)M_3 + h_3 M_4, \\ &\vdots \\ 6 \left[\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \right] &= h_{n-3} M_{n-3} + 2(h_{n-3} + h_{n-2})M_{n-2} + h_{n-2} M_{n-1}, \\ 6 \left[\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \right] &= h_{n-2} M_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})M_{n-1} + h_{n-1} M_n, \\ 0 &= 2M_{n-1} + M_n, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Kemudian, persamaan (3.5) dapat ditulis sebagai berikut.

$$H_{1n \times n} \mathbf{m}_{n \times 1} = 6\mathbf{k}_{n \times 1}, \quad (3.6)$$

dengan

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}, \text{ dan } \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_2} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jika matriks H_1 dapat dibalik, diperoleh solusi tunggal $\mathbf{m} = 6H_1^{-1}\mathbf{k}$.

4. Contoh Kasus

Misalkan diberikan titik-titik data pada Tabel 1 yang dibangkitkan dari fungsi sinus. Titik-titik data tersebut akan diinterpolasi dengan fungsi splin kubik terapit.

Tabel 1. Contoh titik-titik data (x_i, y_i) yang akan diinterpolasi dan lebar selang h_i .

i	1	2	3	4	5
x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y_i	0	1	$\frac{1}{2}$	-1	0
h_i	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	

Berdasarkan Tabel 1, banyak titik data yang akan diinterpolasi adalah $n = 5$. Substitusikan nilai-nilai pada Tabel 1 ke sistem persamaan (3.6). Dengan menggunakan operasi invers pada aplikasi MATLAB, diperoleh invers dari matriks H_1 , sehingga didapatkan solusi dari M_i . Selanjutnya didapatkan nilai-nilai koefisien a_i, b_i, c_i dan d_i dengan menggunakan Teorema 2.2 sebagaimana yang ditampilkan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai-nilai koefisien

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	-0.2219	0.3486	0.6366	0
2	0.1490	-0.6971	0.0891	-1
3	0.1468	-0.2289	-0.8806	$\frac{1}{2}$
4	-0.2207	0.6933	-0.0921	-1

Koefisien-koefisien yang telah diperoleh nilainya tersebut disubstitusikan ke persamaan (2.3), sehingga menghasilkan fungsi interpolasi splin kubik terapan sebagai berikut.

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = -0.2219(x-0)^3 - 0.3486(x-0)^2 + 0.6366(x-0), \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ S_2(x) = 0.149(x - \frac{\pi}{2})^3 - (-0.6971)(x - \frac{\pi}{2})^2 + 0.0891(x - \frac{\pi}{2}) + 1, \\ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \\ S_3(x) = 0.1468(x - \frac{5\pi}{6})^3 - (-0.2289)(x - \frac{5\pi}{6})^2 - (-0.8806)(x - \frac{5\pi}{6}) + \frac{1}{2}, \\ \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ S_4(x) = -0.2207(x - \frac{3\pi}{2})^3 + 0.6193(x - \frac{3\pi}{2})^2 - 0.0921(x - \frac{3\pi}{2}) - (-1), \\ \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Dengan menggunakan aplikasi MATLAB, kurva fungsi splin kubik terapan di atas dapat diplot seperti pada Gambar 1.

Gambar 1. Kurva Splin Kubik Terapan.

Apabila kurva splin kubik terapan dan kurva fungsi sinus diplot dalam satu gambar, maka akan terlihat seperti pada Gambar 2. Dari gambar dapat dilihat bahwa kurva splin kubik terapan dapat mengaproksimasi kemulusan kurva fungsi sinus dengan cukup baik.

Gambar 2. Kurva Splin Kubik Terapit dan Kurva Sinus.

5. Kesimpulan

- (1) Fungsi splin kubik $S(x)$ adalah n buah polinomial orde tiga dengan koefisien-koefisien a_i, b_i, c_i dan d_i memenuhi sifat-sifat berikut:

(a)

$$S(x) = \begin{cases} a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

- (b) $S(x)$ melewati seluruh titik data yang diketahui.
 (c) $S(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$.
 (d) $S'(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$.
 (e) $S''(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$.

Dari kelima sifat di atas dapat diperoleh nilai-nilai koefisien a_i, b_i, c_i dan d_i .

- (2) Dari dua syarat batas splin kubik terapit, diperoleh :

- (a) $2S''(x_1) + S''(x_2) = 0$,
 (b) $2S''(x_{n-1}) + S''(x_n) = 0$.

- (3) Penggunaan interpolasi splin kubik terapit cukup baik dalam menghampiri titik data yang diberikan.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Dr. Susila Bahri, ibu Nova Noliza Bakar, M.Si dan bapak Efendi, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H. and C. Rorres. 2005. Elementary Linear Algebra, Applications Version. Edisi ke-9. Wiley. New York.
- [2] Mathews, Jonh H., K.D. Fink. 2004. Numerical Methods Using MATLAB Fourth Edition. Prentice-Hall, New Jersey.
- [3] Chapra, S.C. dan Raymond, P.C. 2010. Numerical Methods for Engineers Edisi ke-7. McGraw-Hill. New York.