Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **2** Hal. 188 – 194
Edisi Agustus 2019
ISSN : 2303–291X

DETERMINAN MATRIKS $2 \times n$

YOLA SARTIKA SARI, NOVA NOLIZA BAKAR
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : yolasartika60@gmail.com

Diterima 22 Juni 2019 Direvisi 6 Juli 2019 Dipublikasikan 4 Agustus 2019

Abstrak. Konsep determinan yang sering dikenal adalah determinan dari suatu matriks bujursangkar atau determinan matriks $n \times n$, tetapi sekarang telah berkembang konsep determinan pada matriks tak bujursangkar. Dalam tulisan ini akan dibahas determinan matriks berukuran $2 \times n$ dengan $n \geq 2$ dan sifat-sifat determinan matriks $2 \times n$. Salah satu sifat determinan matriks $2 \times n$ dapat dikaitkan dengan luas poligon.

Kata Kunci: Determinan Matriks $2 \times n$, Poligon

1. Pendahuluan

Konsep matriks merupakan salah satu cabang matematika di bidang aljabar linear. Konsep dari suatu matriks berguna untuk menyelesaikan permasalahan dalam ilmu matematika modern, salah satunya adalah penyelesaian permasalahan dengan menggunakan konsep determinan matriks.

Determinan merupakan konsep penting yang mendasar di bidang aljabar linear. Konsep determinan yang sering dikenal adalah determinan dari suatu matriks bujursangkar atau determinan matriks $n \times n$, tetapi sekarang telah berkembang konsep determinan pada matriks tak bujursangkar. Pada penelitian ini akan dibahas kembali tentang determinan matriks tak bujursangkar berukuran $2 \times n$ dengan $n \geq 2$, yang telah dibahas pada [2].

2. Landasan Teori

Berikut diberikan beberapa definisi yang akan digunakan pada bagian selanjutnya.

Definisi 2.1. *[1] Dua matriks adalah setara jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah sama.*

Definisi 2.2. *[1] Suatu hasilkali elementer dari suatu matriks A, $n \times n$, adalah hasilkali dari n entri dari A, yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama.*

Definisi 2.3. *[1] Misalkan A adalah suatu matriks bujursangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan det dan didefinisikan det(A) sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari A. Angka det(A) disebut determinan dari A.*

3. Determinan Matriks $2 \times n$

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang determinan matriks $2 \times n$ dan sifat-sifat determinan matriks $2 \times n$ yang diperkenalkan oleh Radic [2].

Definisi 3.1. *[2] Determinan matriks $2 \times n$ dengan $n \geq 2$ didefinisikan sebagai:*

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{1+2+(i+j)} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}. \tag{3.1}$$

dimana

$$\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \textit{ merupakan } \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.2. *[4] Misalkan $[A_1, \cdots, A_n]$ matriks $2 \times n$ dengan $n \geq 2$. Maka*

$$\begin{aligned} |A_1, A_2, \cdots, A_n| &= |A_1, A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + \cdots + (-1)^n A_n| \\ &\quad + |A_2, A_3 - A_4 + A_5 + \cdots + (-1)^{n-1} A_n| \\ &\quad + \cdots + |A_{n-1}, A_n|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Bukti. Dengan menggunakan Definisi 3.1 diperoleh:

$$\begin{aligned} |A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n| &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \cdots \\ &\quad +(-1)^{(1+2)+(1+n)} \begin{vmatrix} a_1 & a_n \\ b_1 & b_n \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \\ &\quad (-1)^{(1+2)+(2+4)} \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+2)+(2+n)} \begin{vmatrix} a_2 & a_n \\ b_2 & b_n \end{vmatrix} + \cdots \\ &\quad +(-1)^{(1+2)+(n-1+n)} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} \\ &= |A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_1, A_4| + \cdots + (-1)^n |A_1, A_n| + \\ &\quad |A_2, A_3| - |A_2, A_4| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_2, A_n| + \cdots + |A_{n-1}, A_n|. \end{aligned}$$

Menurut Definisi 3.1 diperoleh

$$\begin{aligned} |A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n| &= |A_1, A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + \cdots + (-1)^n A_n| + |A_2, A_3 - A_4 + A_5 + \cdots + \\ &\quad (-1)^{n-1} A_n| + \cdots + |A_{n-1}, A_n|. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3. *[2] Misalkan $[A_1, \cdots, A_n]$ matriks $2 \times n$ dengan $n \geq 3$. Maka*

$$|A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n| = |A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}| + (-1)^n |A_1 - A_2 + \cdots + (-1)^n A_{n-1}, A_n|. \tag{3.3}$$

Bukti.

(i) Untuk $n = 3$ pernyataan (3.3) benar, karena

$$\begin{aligned}|A_1, A_2, A_3| &= |A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_2, A_3| \\ &= |A_1, A_2| - |A_1 - A_2, A_3|.\end{aligned}$$

(ii) Asumsikan pernyataan (3.3) benar untuk $n = k$, berarti

$$|A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_k| = |A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}| + (-1)^k |A_1 - A_2 + \cdots + (-1)^k A_{k-1}, A_k|,$$

(iii) Akan ditunjukkan pernyataan (3.3) benar untuk $n = k + 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}|A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}| = &|A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_1, A_4| + \cdots \\ &+ (-1)^k |A_1, A_k| + (-1)^{k+1} |A_1, A_{k+1}| + |A_2, A_3| - |A_2, A_4| + \cdots \\ &+ (-1)^{k-1} |A_2, A_k| + (-1)^k |A_2, A_{k+1}| + \cdots + |A_k, A_{k+1}|\end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned}|A_1, A_2, \cdots, A_k| = &|A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_1, A_4| + \cdots + (-1)^k |A_1, A_k| + \\ &|A_2, A_3| - |A_2, A_4| + \cdots + (-1)^{k-1} |A_2, A_k| + \cdots + |A_{k-1}, A_k|\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}|A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}| &= |A_1, A_2, \cdots, A_k| + (-1)^{k+1} |A_1, A_{k+1}| + (-1)^k |A_2, A_{k+1}| + \\ &\quad \cdots + |A_k, A_{k+1}| \\ &= |A_1, A_2, \cdots, A_k| + (-1)^{k+1} |A_1 - A_2 + \cdots \\ &\quad + (-1)^{k+1} A_k, A_{k+1}|.\end{aligned}$$

Dari (i), (ii) dan (iii) diperoleh bahwa pernyataan (3.3) benar untuk $n \geq 3$. □

3.1. *Luas Poligon dengan Determinan Matriks* $2 \times n$

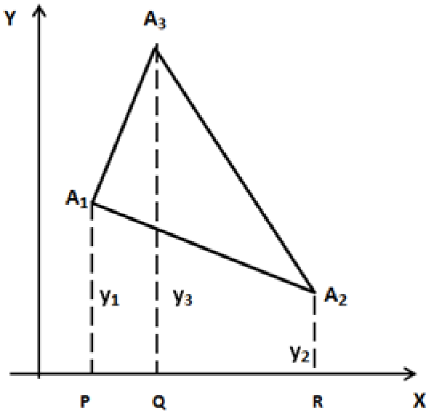
Luas suatu poligon dapat diperoleh dengan menggunakan determinan apabila titik-titik sudut poligon diketahui, dimana titik-titik sudut poligon dinotasikan dengan $A_1 A_2 \cdots A_n$. Salah satu cara menghitung luas poligon adalah menggunakan prinsip perhitungan luas suatu trapesium. Adapun luas suatu poligon dengan menggunakan determinan diberikan oleh teorema berikut:

Teorema 3.4. *[4]*

$$\begin{aligned}\text{Luas poligon } A_1 \cdots A_n = &\frac{1}{2} \cdot ((x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots + x_{n-1} y_n + x_n y_1) \\ &- (x_2 y_1 + x_3 y_2 + \cdots + x_n y_{n-1} + x_1 y_n)).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Bukti. Luas poligon ini akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

(i) Akan ditunjukkan pernyataan (3.4) benar untuk $n = 3$.



Gambar 1. Poligon dengan $n = 3$

Misalkan titik-titik P, Q, R adalah proyeksi titik-titik A_1, A_3, A_2 pada sumbu x, maka

$$\begin{aligned}\text{Luas } \triangle A_1A_2A_3 = &\text{ luas trapesium } PQA_3A_1 + \text{ luas trapesium } QRA_2A_3 - \\ &\text{ luas trapesium } PRA_2A_1.\end{aligned}$$

Pada trapesium PQA_3A_1 memiliki sisi sejajar y_1 dan y_3 dengan tinggi $x_3 - x_1$. Trapesium QRA_2A_3 memiliki sisi sejajar y_2 dan y_3 dengan tinggi $x_2 - x_3$. Trapesium PRA_2A_1 memiliki sisi sejajar y_2 dan y_1 dengan tinggi $x_2 - x_1$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\text{Luas } \triangle A_1A_2A_3 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3) \\ &\quad - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3).\end{aligned}$$

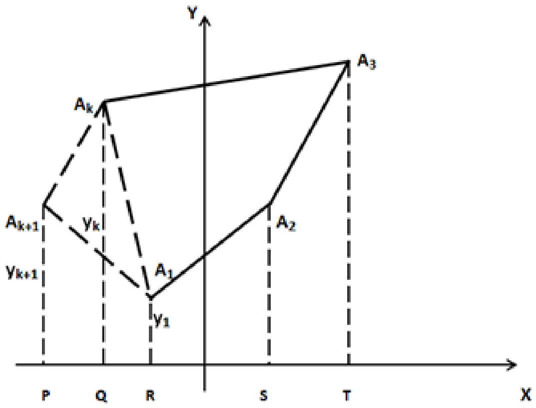
(ii) Asumsikan bahwa pernyataan (3.4) benar untuk suatu $n = k$, berarti

$$\begin{aligned}\text{Luas poligon } A_1 \cdots A_k = &\frac{1}{2} \cdot ((x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_{k-1}y_k + x_ky_1) \\ &-(x_2y_1 + x_3y_2 + \cdots + x_ky_{k-1} + x_1y_k)).\end{aligned}$$

(iii) Akan ditunjukkan bahwa pernyataan (3.4) benar untuk suatu $n = k + 1$. Perhatikan bahwa

$$\text{Luas poligon } A_1 \cdots A_{k+1} = \text{ Luas poligon } A_1 \cdots A_k + \text{ Luas } \triangle A_1A_kA_{k+1}.$$

Misalkan titik-titik P,Q,R adalah proyeksi titik-titik A_{k+1}, A_k, A_1 pada sumbu



Gambar 2. Poligon dengan $n = k + 1$

x, maka

$$\begin{aligned}
Luas \triangle A_1A_kA_{k+1} &= luas\ trapesium\ PQA_kA_{k+1} + luas\ trapesium\ QRA_1A_k \\
&\quad - luas\ trapesium\ PRA_1A_{k+1} \\
&= \frac{1}{2}(y_{k+1} + y_k)(x_k - x_{k+1}) + \frac{1}{2}(y_k + y_1)(x_1 - x_k) \\
&\quad - \frac{1}{2}(y_{k+1} + y_1)(x_1 - x_{k+1}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot ((x_ky_{k+1} + x_1y_k + x_{k+1}y_1) - (x_ky_1 + x_{k+1}y_k - x_1y_{k+1}))
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\text{Luas poligon } A_1 \cdots A_{k+1} &= \frac{1}{2} \cdot ((x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_{k-1}y_k + x_ky_1) - (x_2y_1 \\
&\quad + x_3y_2 + \cdots + x_ky_{k-1} + x_1y_k)) + \frac{1}{2} \cdot ((x_ky_{k+1} \\
&\quad + x_1y_k + x_{k+1}y_1) - (x_ky_1 + x_{k+1}y_k - x_1y_{k+1})) \\
&= \frac{1}{2} \cdot ((x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ky_{k+1} + x_{k+1}y_1) - \\
&\quad (x_2y_1 + x_3y_2 + \cdots + x_{k+1}y_k + x_1y_{k+1})).
\end{aligned}$$

Dari (i), (ii) dan (iii) maka pernyataan (3.4) benar untuk $n \geq 3$. □

Teorema 3.5. *[2] Misalkan $A_1 \cdots A_n$ poligon di R^2 dengan $n \geq 3$. Maka*

$$2 \times Luas\ A_1 \cdots A_n = |A_1 + A_2, A_2 + A_3, \cdots, A_{n-1} + A_n, A_n + A_1|. \qquad (3.5)$$

Bukti. Teorema ini akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

(i) Untuk $n = 3$ pernyataan (3.5) benar, karena

$$\begin{aligned}
&|A_1 + A_2, A_2 + A_3, A_3 + A_1| \\
&\quad = |A_1 + A_2, A_2 + A_3| - |A_1 + A_2, A_3 + A_1| + |A_2 + A_3, A_3 + A_1| \\
&\quad = |A_1 + A_2, A_2| + |A_1 + A_2, A_3| - (|A_1 + A_2, A_3| + |A_1 + A_2, A_1|) + \\
&\quad\quad |A_2 + A_3, A_3| + |A_2 + A_3, A_1| \\
&\quad = |A_1, A_2| + |A_2, A_3| + |A_3, A_1|.
\end{aligned}$$

(ii) Asumsikan pernyataan (3.5) benar untuk $n = k$, berarti

$$\begin{aligned}
|A_1 + A_2, A_2 + A_3, \cdots, A_{k-1} + A_k, A_k + A_1| = {} & |A_1, A_2| + |A_2, A_3| + \cdots + \\
& |A_{k-1}, A_k| + |A_k, A_1|.
\end{aligned}$$

(iii) Akan ditunjukkan pernyataan (3.5) benar untuk $n = k + 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&|A_1 + A_2, A_2 + A_3, \cdots, A_{k-1} + A_k, A_k + A_{k+1}, A_{k+1} + A_1| \\
&\quad = |A_1 + A_2, \cdots, A_k + A_{k+1}| + (-1)^{k+1}|A_1 + (-1)^{k+1}A_{k+1}, A_{k+1} + A_1| \\
&\quad = |A_1 + A_2, \cdots, A_{k-1} + A_k| + (-1)^k|A_1 + (-1)^k A_k, A_k + A_{k+1}| + \\
&\quad\quad (-1)^{k+1}|A_1 + (-1)^{k+1}A_{k+1}, A_{k+1} + A_1| \\
&\quad = |A_1 + A_2, \cdots, A_{k-1} + A_k| + (-1)^k|A_1, A_k| + |A_k, A_{k+1}| + |A_{k+1}, A_1|
\end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned}
&|A_1 + A_2, \cdots, A_k + A_1| \\
&\quad = |A_1 + A_2, A_2 + A_3, \cdots, A_{k-1} + A_k| + (-1)^k|A_1 + (-1)^k A_k, \\
&\quad\quad A_k + A_1| \\
&\quad = |A_1 + A_2, A_2 + A_3, \cdots, A_{k-1} + A_k| + (-1)^k|A_1, A_k| + |A_k, A_1|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|A_1, A_2| + |A_2, A_3| + \cdots + |A_{k-1}, A_k| + |A_k, A_1| \\
&\quad = |A_1 + A_2, A_2 + A_3, \cdots, A_{k-1} + A_k| + (-1)^k|A_1, A_k| + |A_k, A_1| \\
&|A_1, A_2| + |A_2, A_3| + \cdots + |A_{k-1}, A_k| \\
&\quad = |A_1 + A_2, A_2 + A_3, \cdots, A_{k-1} + A_k| + (-1)^k|A_1, A_k|
\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
&= |A_1 + A_2, A_2 + A_3, \cdots, A_{k-1} + A_k| + (-1)^k|A_1, A_k| + |A_k, A_{k+1}| + \\
&\quad |A_{k+1}, A_1| \\
&= |A_1, A_2| + |A_2, A_3| + \cdots + |A_{k-1}, A_k| + |A_k, A_{k+1}| + |A_{k+1}, A_1|.
\end{aligned}$$

Dari (i), (ii) dan (iii) diperoleh bahwa pernyataan (3.5) benar untuk $n \geq 3$. □

4. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas diperoleh sifat-sifat determinan matriks $2 \times n$, yaitu sebagai berikut. Misalkan $A_1 \cdots A_n$ poligon di R^2 dan misalkan $A_i(x_i, y_i)$ dimana $i = 1, \cdots, n$.

(1) Misalkan $[A_1, \cdots, A_n]$ matriks $2 \times n$ dengan $n \geq 2$. Maka

$$\begin{aligned}|A_1, A_2, \cdots, A_n| = &|A_1, A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + \cdots + (-1)^n A_n| \\ &+|A_2, A_3 - A_4 + A_5 + \cdots + (-1)^{n-1} A_n| \\ &+ \cdots + |A_{n-1}, A_n|.\end{aligned}$$

(2) Misalkan $[A_1, \cdots, A_n]$ matriks $2 \times n$ dengan $n \geq 3$. Maka

$$|A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n| = |A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}| + (-1)^n |A_1 - A_2 + \cdots + (-1)^n A_{n-1}, A_n|.$$

(3) Misalkan $A_1 \cdots A_n$ poligon di R^2 dengan $n \geq 3$. Maka

$$2 \times Luas\ A_1 \cdots A_n = |A_1 + A_2, A_2 + A_3, \cdots, A_{n-1} + A_n, A_n + A_1|.$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Admi Nazra, Dr. Yanita, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, dan Ibu Dr. Shelvi Ekariani yang telah memberikan masukan dan saran sehingga jurnal ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H dan C. Rorres. 2000. *Aljabar Linier Elementer, Versi Aplikasi, Edisi Kedelapan Jilid 1*. Erlangga, Jakarta.

[2] Radic, M. 2005. About a Determinant of Rectangular $2 \times n$ Matrix and its Geometric Interpretation. *Contributions to Algebra and Geometry*. **46**: 321 – 349.

[3] Rosen, K.H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications*. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.

[4] Hw, Slamet. 2018. *Geometri Analitika Bidang Datar*. Muhammadiyah University Press, Surakarta.