

PEMODELAN PENYEBARAN PENYEBARAN PENYAKIT FLU BURUNG

DEA DESDWIRIA PUTRI, MAHDHIVAN SYAFWAN

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
dea.desdwiria@gmail.com*

Abstrak. Penyakit flu burung merupakan salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh virus influenza *H5N1* dan sangat mudah bermutasi. Pada paper ini akan dijelaskan konstruksi model penyebaran penyakit flu burung pada populasi unggas dan populasi unggas-manusia. Dari model yang diperoleh kemudian dicari titik-titik kesetimbangannya. Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan sistem di sekitar titik-titik kesetimbangan tersebut. Simulasi numerik untuk kasus endemik memberikan hasil yang sesuai dengan analisis kestabilan.

Kata Kunci: Model flu burung, titik kesetimbangan, analisis kestabilan, bilangan reproduksi dasar

1. Pendahuluan

Penyakit flu burung disebabkan oleh virus influenza tipe A dengan sub tipe *H5N1* yang menyebar antar unggas dan dapat menular pada manusia. Bila dilihat sejarahnya, awal ditemukannya flu burung yaitu pada tahun 1878 di Italia dan diidentifikasi pada tahun 1955 sebagai virus *Avian Influenza*. Terjadi empat kali pandemi influenza pada abad ke-20 yaitu Spanish Flu (1918 - 1919), Asian Flu (1957 - 1958), Hongkong Flu (1968 - 1969), Russian Flu (1977) [1].

Indonesia merupakan negara di Asia yang tergolong rawan dalam peningkatan dan penyebaran penyakit flu burung. Hingga tahun 2014, di Indonesia telah tercatat 197 kasus flu burung dengan 165 merupakan kasus kematian [6]. Sejak tahun 2003, penyakit ini telah menyebar dari burung - burung di Asia ke Timur Tengah, Eropa dan Afrika. Manusia juga dapat terkena penyakit ini pada kasus-kasus tertentu, umumnya setelah berhubungan dengan unggas-unggas yang sakit. Sampai saat ini, diantara kasus penyakit flu burung pada manusia di berbagai daerah di dunia yang sudah tercatat, lebih dari 200 diantaranya meninggal dunia. Melihat kasus penyakit flu burung yang masih terus berkembang, tidak menutup kemungkinan penyakit flu burung menjadi penyebab pandemi influenza di dunia. Jika terjadi pandemi, tentu ini akan menjadi ancaman bagi dunia, termasuk Indonesia.

Dalam paper ini akan dibahas model penyebaran penyakit flu burung yang dapat digunakan sebagai salah satu cara untuk mengetahui pola penyebaran penyakit flu burung. Sebagian besar pembahasan pada paper ini merujuk pada [5].

2. Tinjauan Pustaka

Pandang sistem persamaan diferensial biasa orde satu,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

dimana $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ dan $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$

Definisi 2.1. *Titik kesetimbangan dari sistem (2.1) adalah titik yang memenuhi persamaan*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Jika solusi dari sistem (2.1) dimulai dari titik kesetimbangan, maka solusi itu selalu tetap berada pada titik tersebut (solusi konstan).

Sekarang pandang sistem

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y), \\ y' &= f_2(x, y). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Misalkan titik (x^*, y^*) merupakan titik kesetimbangan dari sistem tersebut. Sistem (2.2) di sekitar titik kesetimbangan (x^*, y^*) dapat disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\mathbf{v}' = J\mathbf{v},$$

dimana $\mathbf{v} = [x, y]^T$ dan

$$J \equiv J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Matriks J disebut matriks Jacobian dari sistem (2.2) yang dihitung di titik kesetimbangan (x^*, y^*) .

Kestabilan dari sistem (2.2) di sekitar titik kesetimbangan ditentukan oleh nilai-nilai eigen dari matriks Jacobiannya. Hubungan tersebut diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 2.2. [4] *Diberikan matriks Jacobian $J(x^*, y^*)$ dari sistem (2.2) dengan nilai eigen λ .*

- (a) *Jika bagian riil dari semua nilai eigen dari matriks $J(x^*, y^*)$ bernilai negatif, maka titik kesetimbangan (x^*, y^*) stabil asimtotik.*
- (b) *Jika terdapat nilai eigen dari matriks $J(x^*, y^*)$ yang bagian riilnya bernilai positif, maka titik kesetimbangan (x^*, y^*) tidak stabil.*

Misalkan A suatu matriks $n \times n$. Maka nilai eigen dari matriks tersebut, katakanlah λ , dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) disebut **persamaan karakteristik** atau **polinomial karakteristik** dari A dan akar-akarnya merupakan nilai-nilai eigen dari matriks A .

Teorema berikut memberikan kriteria agar akar-akar persamaan karakteristik (atau nilai-nilai eigen) bernilai riil negatif. Hal ini diperlukan untuk menentukan apakah suatu sistem bersifat stabil asimtotik atau tidak di sekitar titik kesetimbangannya, sebagaimana yang diberikan oleh Teorema 2.2.

Teorema 2.3. [3](Kriteria Routh-Hurwitz) *Misalkan a_1, a_2, \dots, a_n adalah bilangan riil dan tetapkan $a_j = 0$ jika $j > n$. Maka semua akar polinomial*

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

bernilai riil negatif jika dan hanya jika determinan

$$M_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & a_{2k-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{bmatrix},$$

untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$, bernilai positif.

Berikut adalah teorema yang membahas tentang matriks blok 2×2 dan determinannya.

Teorema 2.4. [2] *Jika A dan D adalah matriks persegi, maka*

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \right) = \det(A) \det(D).$$

3. Konstruksi Model dan Analisis Kestabilan

3.1. Konstruksi Model

3.1.1. Sistem Unggas

Populasi unggas hanya dibagi menjadi dua kelompok yaitu unggas *susceptible* dan unggas *infected*. Model penyebaran penyakit flu burung untuk populasi unggas mengikuti model *SI*, yaitu [5]:

$$\begin{aligned} X' &= c - bX - \omega XY, \\ Y' &= \omega XY - (b + m)Y, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan

- $X \equiv X(t)$ = banyaknya unggas *susceptible* pada waktu t ,
- $Y \equiv Y(t)$ = banyaknya unggas *infected* pada waktu t ,
- c = jumlah kelahiran unggas setiap satuan waktu,
- b = laju kematian alami unggas setiap satuan waktu,
- ω = laju interaksi antara unggas *susceptible* dengan unggas *infected* setiap satuan waktu yang menyebabkan penularan,
- m = laju kematian unggas *infected* akibat penyakit flu burung setiap satuan waktu.

3.1.2. *Sistem Manusia*

Populasi manusia dibagi menjadi empat kelompok, yaitu manusia *susceptible*, manusia *infected* flu burung, manusia *infected* mutan flu burung dan manusia *recovered*. Model penyebaran flu burung pada populasi manusia mengikuti model *SIR* berikut ini [5]:

$$\begin{aligned}
S' &= \lambda - \mu S - \beta_1 SY - \beta_2 SH, \\
B' &= \beta_1 SY - (\mu + d + \epsilon)B, \\
H' &= \epsilon B + \beta_2 SH - (\mu + \alpha + \gamma)H, \\
R' &= \gamma H - \mu R.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

dengan

$S \equiv S(t)$	=	banyaknya manusia <i>susceptible</i> pada waktu t ,
$B \equiv B(t)$	=	banyaknya manusia <i>infected</i> flu burung pada waktu t ,
$H \equiv H(t)$	=	banyaknya manusia <i>infected</i> mutan flu burung pada waktu t ,
$R \equiv R(t)$	=	banyaknya manusia <i>recovered</i> pada waktu t ,
λ	=	jumlah kelahiran manusia setiap satuan waktu,
μ	=	laju kematian alami manusia setiap satuan waktu,
β_1	=	laju interaksi antara manusia <i>susceptible</i> dengan unggas <i>infected</i> setiap satuan waktu yang menyebabkan penularan,
β_2	=	laju interaksi antara manusia <i>susceptible</i> dengan manusia <i>infected</i> mutan flu burung setiap satuan waktu yang menyebabkan penularan,
γ	=	laju penyembuhan manusia <i>infected</i> mutan flu burung,
ϵ	=	laju mutasi,
d	=	laju kematian manusia <i>infected</i> flu burung akibat penyakit flu burung setiap satuan waktu,
α	=	laju kematian manusia <i>infected</i> mutan flu burung akibat mutan flu burung setiap satuan waktu.

Dengan menggabungkan penyebaran model penyakit flu burung yang terjadi pada populasi unggas dan populasi manusia, maka model penyebaran penyakit flu burung pada populasi unggas-manusia mengikuti model *SI - SIR* berikut ini:

$$\begin{aligned}
X' &= c - bX - \omega XY, \\
Y' &= \omega XY - (b + m)Y, \\
S' &= \lambda - \mu S - \beta_1 SY - \beta_2 SH, \\
B' &= \beta_1 SY - (\mu + d + \epsilon)B, \\
H' &= \epsilon B + \beta_2 SH - (\mu + \alpha + \gamma)H, \\
R' &= \gamma H - \mu R.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Pada model di atas, semua parameter bernilai positif dan nilai ϵ cukup kecil. Selain itu, nilai b jauh lebih besar dari μ ($b \gg \mu$). Selanjutnya, karena perbedaan virulensi (yaitu kemampuan virus untuk menyebabkan penyakit) nilai α kurang dari d dan nilai d kurang dari m ($m > d > \alpha$).

3.2. Analisis Kestabilan Model

3.2.1. Sistem Unggas

Titik kesetimbangan pada sistem unggas dapat ditentukan dengan menetapkan X dan Y sebagai fungsi konstan (tidak bergantung pada waktu t), sehingga diperoleh dua titik kesetimbangan pada sistem unggas, yaitu:

- $e_0 = (X_0, 0)$ dimana $X_0 = \frac{c}{b}$, yang merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit.
- $e_+ = (X^*, Y^*)$ dimana $X^* = \left(\frac{b+m}{\omega}\right)$ dan $Y^* = \left(\frac{c}{b+m} - \frac{b}{\omega}\right)$, yang merupakan titik kesetimbangan endemik.

Bilangan reproduksi dasar untuk penyakit flu burung pada populasi unggas (r_0), didefinisikan sebagai banyaknya unggas *susceptible* yang terinfeksi akibat tertular dari unggas lain yang telah terinfeksi. Laju dimana satu unggas menginfeksi unggas baru diberikan oleh ωX . Jika semua unggas *susceptible* maka $X = \frac{c}{b}$. Karena waktu hidup dari unggas yang terinfeksi adalah $\frac{1}{b+m}$, maka bilangan reproduksi dasar r_0 adalah

$$r_0 = \frac{\omega X}{b+m} = \frac{c\omega}{b(b+m)}.$$

Berikut merupakan teorema yang menjelaskan syarat cukup kestabilan dari sistem unggas di sekitar titik-titik kesetimbangannya.

Teorema 3.1. [5] *Jika $r_0 < 1$, maka e_0 stabil asimtotik. Jika $r_0 > 1$, maka e_+ stabil asimtotik.*

Bukti. Matriks Jacobian yang bersesuaian dengan sistem (3.1) adalah

$$J = \begin{pmatrix} -b - \omega Y & -\omega X \\ \omega Y & \omega X - (b+m) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Pada titik kesetimbangan $e_0 = \left(\frac{c}{b}, 0\right)$, nilai-nilai eigen dari matriks Jacobian (3.4) adalah $-b$ dan $\omega\left(\frac{c}{b}\right) - b - m$. Jika $r_0 = \frac{c\omega}{b(b+m)} < 1$ maka $\frac{c\omega}{b} - (b+m) < 0$. Jadi, e_0 stabil asimtotik.

Selanjutnya pada titik kesetimbangan $e_+ = (X^*, Y^*)$, nilai-nilai eigen p diperoleh dari persamaan karakteristik

$$p^2 + \{2b + m + \omega(Y^* - X^*)\}p + b(b+m) + b\omega(Y^* - X^*) + m\omega Y^* = 0. \quad (3.5)$$

Jika $r_0 = \frac{c\omega}{b(b+m)} > 1$, maka $c\omega - b(b+m) > 0$, sehingga berlaku

$$2b + m + \omega(Y^* - X^*) > 0 \text{ dan } b(b+m) + b\omega(Y^* - X^*) + m\omega Y^* > 0.$$

Karena semua koefisien dari persamaan karakteristik (3.5) bernilai positif, maka e_+ adalah stabil asimtotik. ■

3.2.2. *Sistem Unggas-Manusia*

Titik kesetimbangan pada populasi unggas-manusia yang diberikan oleh sistem (3.3) ditentukan dengan menetapkan X, Y, S, B, H dan R sebagai fungsi-fungsi konstan (tidak bergantung pada waktu) sehingga diperoleh tiga titik kesetimbangan berikut:

- $E_0 = (X, Y, S, B, H, R) = \left(\frac{\epsilon}{b}, 0, \frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$, yang merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit.
- $E_b = (X, Y, \tilde{S}, B, \tilde{H}, \tilde{R}) = \left(\frac{\epsilon}{b}, 0, \frac{\mu+\alpha+\gamma}{\beta_2}, 0, \left(\frac{\lambda}{\mu+\alpha+\gamma} - \frac{\mu}{\beta_2}\right), \frac{\gamma}{\mu}\tilde{H}\right)$, yang merupakan titik kesetimbangan endemik manusia.
- $E_+ = (X^*, Y^*, S^*, B^*, H^*, R^*)$, yang merupakan titik kesetimbangan endemik penuh, dimana

$$H^* = \frac{-[(\mu + \beta_1 Y^*)(\mu + \alpha + \gamma) - \beta_2 \lambda]}{2\beta_2(\mu + \alpha + \gamma)} + \frac{\sqrt{[(\mu + \beta_1 Y^*)(\mu + \alpha + \gamma) - \beta_2 \lambda]^2 - 4(\beta_2(\mu + \alpha + \gamma))\left(\frac{\epsilon\beta_1\lambda Y^*}{\mu+d+\epsilon}\right)}}{2\beta_2(\mu + \alpha + \gamma)},$$

$$S^* = \frac{\lambda}{\mu + \beta_1 Y^* + \beta_2 H^*},$$

$$B^* = \frac{\beta_1 S^* Y^*}{\mu + d + \epsilon},$$

$$R^* = \frac{\gamma}{\mu} H^*.$$

Bilangan reproduksi dasar untuk penyakit flu burung yang telah bermutasi pada populasi manusia (R_0), didefinisikan sebagai banyaknya manusia *susceptible* yang terinfeksi akibat tertular dari manusia yang terinfeksi mutan flu burung. Laju infeksi manusia yang terinfeksi mutan flu burung adalah $\beta_2 S$. Jika semua manusia *susceptible*, maka $S = \frac{\lambda}{\mu}$. Waktu hidup manusia yang terinfeksi mutan flu burung adalah $\frac{1}{\mu+\alpha+\gamma}$. Jadi

$$R_0 = \frac{\beta_2 S}{\mu + \alpha + \gamma} = \frac{\beta_2 \lambda}{\mu(\mu + \alpha + \gamma)}.$$

Berikut adalah teorema yang menjelaskan syarat cukup kestabilan titik kesetimbangan pada populasi unggas-manusia.

Teorema 3.2. [5] *Jika $r_0 < 1$ dan $R_0 < 1$, maka E_0 stabil asimtotik. Jika $r_0 < 1$ dan $R_0 > 1$, maka E_b stabil asimtotik. Jika $r_0 > 1$, maka E_+ stabil asimtotik.*

Bukti. Matriks Jacobian yang bersesuaian dengan sistem unggas-manusia adalah

$$J = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & A \end{pmatrix},$$

dimana

$$B = \begin{pmatrix} -b - \omega Y & -\omega X \\ \omega Y & \omega X - (b + m) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 S \\ 0 & \beta_1 S \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

dan

$$A = \begin{pmatrix} -\mu - (\beta_1 Y + \beta_2 H) & 0 & -\beta_2 S & 0 \\ \beta_1 Y & -(\mu + d + \epsilon) & 0 & 0 \\ \beta_2 & \epsilon & \beta_2 S - (\mu + \alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Perhatikan bahwa J adalah matriks blok, sehingga $(J - \lambda I)$ juga matriks blok. Berdasarkan Teorema 2.4, $\det(J - \lambda I)$ diberikan oleh

$$\det(J - \lambda I) = \det(B - \lambda I)\det(A - \lambda I).$$

Berdasarkan Teorema 3.1, submatriks B di titik kesetimbangan E_0 dan E_b mempunyai nilai eigen riil negatif jika $r_0 < 1$ dan di titik kesetimbangan E_+ mempunyai nilai eigen riil negatif jika $r_0 > 1$. Selanjutnya syarat cukup lainnya untuk kestabilan titik-titik kesetimbangan tersebut dapat ditentukan dengan menyelidiki nilai-nilai eigen dari submatriks A . Berikut akan ditinjau kestabilan setiap titik kesetimbangan.

- Untuk titik $E_0 = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$, nilai-nilai eigen dari submatriks A adalah $-\mu$, $-(\mu + d + \epsilon)$, dan $\frac{\beta_2 \lambda}{\mu} - (\mu + \alpha + \gamma)$. Jika $R_0 = \frac{\beta_2 \lambda}{\mu(\mu + \alpha + \gamma)} < 1$ maka $\frac{\beta_2 \lambda}{\mu} - (\mu + \alpha + \gamma) < 0$. Jadi jika $r_0 < 1$ dan $R_0 < 1$, maka E_0 stabil asimtotik.
- Untuk titik $E_b = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\mu + \alpha + \gamma}{\beta_2}, 0, \left(\frac{\lambda}{\mu + \alpha + \gamma} - \frac{\mu}{\beta_2}\right), \frac{\gamma}{\mu} \tilde{H}\right)$, nilai-nilai eigen p diperoleh dari persamaan karakteristik

$$f(p) = (p + \mu + d + \epsilon)(p^2 + a_0 p + a_1) = 0, \quad (3.8)$$

dimana

$$a_0 = \frac{\beta_2 \lambda}{\mu + \alpha + \gamma}, \quad a_1 = \beta_2 \lambda - \mu(\mu + \alpha + \gamma).$$

Dari persamaan karakteristik tersebut, diperoleh nilai-nilai eigen p_1, p_2, p_3 , dimana $p_1 = -(\mu + d + \epsilon)$ dan p_2, p_3 merupakan akar-akar dari persamaan $p^2 + a_0 p + a_1 = 0$, dengan $a_0 = \frac{\beta_2 \lambda}{\mu + \alpha + \gamma} > 0$ dan $a_1 = \beta_2 \lambda - \mu(\mu + \alpha + \gamma)$. Jika $R_0 = \frac{\beta_2 \lambda}{\mu(\mu + \alpha + \gamma)} > 1$, maka $a_1 > 0$. Jadi, jika $r_0 < 1$ dan $R_0 > 1$, maka E_b stabil asimtotik.

- Untuk titik $E_+ = (X^*, Y^*, S^*, B^*, H^*, R^*)$, nilai-nilai eigen p diperoleh dari persamaan karakteristik

$$f(p) = p^3 + a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0.$$

dimana

$$\begin{aligned}
a_0 &= \mu + \beta_1 Y^* + \beta_2 H^* + \mu + d + \epsilon + \frac{\epsilon B^*}{H^*}, \\
a_1 &= (\mu + \beta_1 Y^* + \beta_2 H^*)(\mu + d + \epsilon) + (\mu + d + \epsilon) \frac{\epsilon B^*}{H^*} \\
&\quad + (\mu + \beta_1 Y^* + \beta_2 H^*) \frac{\epsilon B^*}{H^*} + \beta_2^2 S^* H^*, \\
a_2 &= (\mu + \beta_1 Y^* + \beta_2 H^*)(\mu + d + \epsilon) \frac{\epsilon B^*}{H^*} + \beta_1 \beta_2 \epsilon S^* Y^* \\
&\quad + \beta_2^2 S^* H^* (\mu + d + \epsilon).
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa semua koefisien a_i ($i = 0, 1, 2$) positif dan $a_0 a_1 - a_2 > 0$, sehingga berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, semua nilai eigen bernilai riil negatif. Jadi, jika $r_0 > 1$, E_+ stabil asimtotik. ■

4. Simulasi Numerik

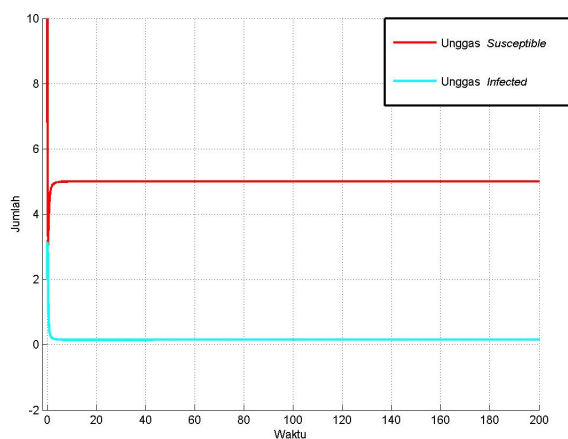
Simulasi numerik pada paper ini bertujuan untuk melihat penyebaran penyakit flu burung pada populasi unggas dan populasi unggas-manusia. Adapun jumlah populasi awal ditetapkan sebagai berikut:

$$X(0) = 10, \quad Y(0) = 2, \quad S(0) = 100, \quad B(0) = 0, \quad H(0) = 0, \quad \text{dan} \quad R(0) = 0.$$

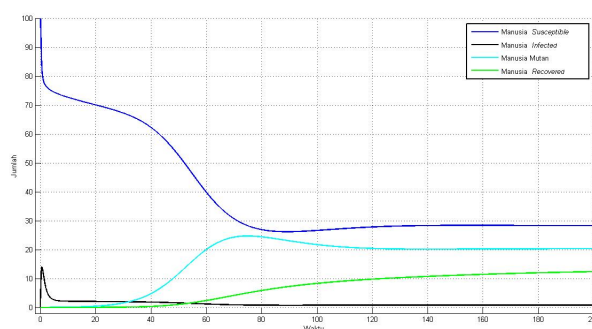
Sedangkan nilai-nilai parameter ditetapkan sebagai berikut. $c = 26,5$, $b = 5$, $m = 5$, $\omega = 2$, $\lambda = 3$, $\mu = 0,015$, $d = 1$, $\alpha = 0,06$, $\beta_1 = 0,2$, $\beta_2 = 0,003$, $\gamma = 0,01$ dan $\epsilon = 0,001$.

Dengan menggunakan nilai-nilai parameter tersebut, diperoleh bilangan reproduksi dasar untuk populasi unggas, $r_0 = 1,06$ ($r_0 > 1$) dan populasi unggas-manusia, $R_0 \approx 7,1$ ($R_0 > 1$). Selanjutnya diperoleh titik-titik kesetimbangan untuk sistem unggas, $e_0 = (5, 3; 0)$ dan $e_+ = (5; 0, 15)$. Sedangkan pada sistem unggas-manusia, diperoleh titik-titik kesetimbangan $E_0 = (5, 3; 0; 200; 0; 0; 0)$, $E_b = (5, 3; 0; 1, 0083 \times 10^3; 30, 29; 20, 196)$, 6 dan $E_+ = (5; 0, 15; 28, 32; 0, 84; 20, 31; 13, 54)$.

Dengan menyelesaikan sistem (3.1) dan (3.3) secara numerik (dalam hal ini digunakan metode Runge-Kutta orde 4) untuk nilai-nilai parameter dan jumlah populasi awal tersebut, diperoleh kurva solusi untuk masing-masing populasi yang diberikan pada Gambar 1 dan 2.



Gambar 1. Grafik solusi model penyebaran penyakit flu burung pada populasi unggas.



Gambar 2. Grafik solusi model penyebaran penyakit flu burung pada populasi manusia.

Dari simulasi dapat dilihat bahwa kasus flu burung pada populasi unggas dan populasi unggas-manusia menuju ke titik kesetimbangan endemik yaitu e_+ dan E_+ .

5. Kesimpulan

Model penyebaran penyakit flu burung dikonstruksi berdasarkan dua kelompok populasi, yaitu populasi unggas dan populasi campuran unggas-manusia. Model pada populasi unggas mengikuti model SI sedangkan model pada populasi unggas-manusia mengikuti model $SI-SIR$.

Selanjutnya diperoleh dua titik kesetimbangan pada sistem unggas yaitu e_0 (bebas penyakit) dan e_+ (endemik). Sedangkan titik-titik kesetimbangan pada sistem unggas-manusia ada tiga yaitu E_0 (bebas penyakit), E_b (endemik manusia), dan E_+ (endemik penuh).

Untuk mengetahui tingkat penyebaran penyakit flu burung, digunakan suatu ukuran yang disebut bilangan reproduksi dasar (r_0 untuk sistem unggas dan R_0 untuk sistem unggas-manusia). Dari analisis kestabilan di sekitar titik-titik kesetimbangan pada sistem unggas diperoleh jika $r_0 < 1$, maka e_0 stabil asimtotik sedangkan jika $r_0 > 1$, maka e_+ stabil asimtotik. Selanjutnya dari analisis kestabilan di sekitar titik-titik kesetimbangan pada sistem unggas-manusia didapatkan jika $r_0 < 1$ dan $R_0 < 1$, maka E_0 stabil asimtotik, jika $r_0 < 1$ dan $R_0 > 1$, maka E_b stabil asimtotik dan jika $r_0 > 1$, maka E_+ stabil asimtotik.

Dengan menggunakan nilai-nilai parameter tertentu seperti yang dijelaskan pada simulasi numerik, diperoleh $r_0 = 1,06$ ($r_0 > 1$) dan $R_0 \approx 7,1$ ($R_0 > 1$). Hal ini menunjukkan bahwa kasus penyakit flu burung berpotensi menjadi endemik di kedua populasi tersebut. Dari simulasi yang dilakukan dengan menggunakan nilai-nilai parameter tersebut, diperoleh hasil yang sesuai dengan analisis kestabilan, yaitu kurva solusi untuk sistem unggas menuju ke titik e_+ (stabil asimtotik) dan kurva solusi untuk sistem manusia menuju ke titik E_+ (stabil asimtotik).

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan hal-hal berikut:

- (1) Mengembangkan model flu burung dengan mempertimbangkan faktor-faktor lainnya, seperti pemberian vaksinasi.
- (2) Perlu dilakukan analisis lebih lanjut tentang kestabilan di sekitar titik kesetimbangan.

Daftar Pustaka

- [1] Anonim. 2012. *Sejarah Flu Burung*. <http://devawisnu23.wordpress.com/2012/03/19/sejarah-penyebaran-virus-flu-burung-faktor-penyebab-terjadinya-fluburung/>. Diakses pada 2 September 2014.
- [2] Abadir, Karim M. and John R. Magnus. 2005. *Matrix Algebra*. Cambridge University Press, New York.
- [3] Fisher, S. D. 1990. *Complex Variables Second Edition*. Wadsworth and software. Pacific Grove. California.
- [4] Olsder, G.J. 1994. *Mathematics System Theory*. The Netherlands: Delftse Uitgevers Maatscappij b.v.
- [5] Shingo, I., Y. Takeuchi and X. Liu. 2006. Avian - human influenza epidemic model. *Mathematical Biosciences*. **207** (1): 1-25.
- [6] WHO. Tanpa Tahun. *Database of Avian Influenza*. <http://www.who.int>., Diakses pada 1 April 2015.