Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **2** Hal. 11 – 15
ISSN : 2303–2910
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

Graf Ramsey $(3K_2, C_3)$-Minimal

HIDAYATI RAIS, LYRA YULIANTI, ADMI NAZRA
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
h.yati09@gmail.com

Abstrak. Misalkan diberikan graf G dan H sebarang. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa pada sebarang pewarnaan 2-warna, merah atau biru, terhadap semua sisi graf F mengakibatkan F memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H. Graf F adalah graf Ramsey (G, H)-minimal jika $F \rightarrow (G, H)$ dan $F^* \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang subgraf sejati $F^* \subset F$. Selanjutnya $\mathcal{R}(G, H)$ menyatakan kelas yang memuat semua graf Ramsey (G, H)-minimal. Pada tulisan ini diberikan beberapa syarat perlu untuk keanggotaan $\mathcal{R}(3K_2, C_3)$ serta beberapa graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, C_3)$.

Kata Kunci: Graf Ramsey minimal, $3K_2$, siklus, pewarnaan-(G, H)

1. Pendahuluan

Misalkan diberikan graf G dan H sebarang. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa pada sebarang pewarnaan 2-warna, merah atau biru, pada semua sisi graf F akan mengakibatkan F memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H. Selanjutnya, suatu *pewarnaan*-(G, H) pada graf F didefinisikan sebagai pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F sedemikian sehingga F tidak memuat subgraf merah G sekaligus tidak memuat subgraf biru H. Jika suatu graf F^* mempunyai *pewarnaan*-(G, H), maka dinotasikan $F^* \nrightarrow (G, H)$. Graf F adalah graf Ramsey (G, H)-minimal jika $F \rightarrow (G, H)$ dan $F^* \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang subgraf sejati $F^* \subset F$. Selanjutnya $\mathcal{R}(G, H)$ menyatakan kelas yang memuat semua graf Ramsey (G, H)-minimal. Suatu pewarnaan-(G, H) pada F adalah pewarnaan merah-biru dari F dengan G merah dan H biru.

Konsep graf Ramsey-minimal mulai diteliti pada saat Burr dkk. [1], memberikan pertanyaan tentang karakterisasi graf F yang memenuhi $F \rightarrow (G, H)$ untuk graf G dan H tertentu. Berikut adalah hasil yang telah diperoleh terkait $\mathcal{R}(mK_2, H)$ untuk m sebarang, $m \geq 3$ dan H graf sebarang. Burr dkk. [2], membuktikan bahwa $\mathcal{R}(mK_2, H)$ merupakan kelas berhingga untuk setiap bilangan bulat positif m dan sebarang graf H. Burr dkk. [3], memberikan karakterisasi dari graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, tK_2)$ untuk $t \geq 4$. Selanjutnya, Burr dkk. [2], memberikan beberapa graf yang termasuk dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_3)$. Dalam tulisan ini akan ditentukan karakterisasi dari semua graf F yang berada dalam $\mathcal{R}(3K_2, C_3)$.

2. Syarat Perlu untuk Keanggotaan $\mathcal{R}(3K_2, C_3)$

Burr dkk. [1] mendefinisikan graf Ramsey-minimal sebagai berikut.

Definisi 2.1. [1] *Diberikan graf G dan H. Graf F dikatakan sebagai **graf Ramsey** (G, H)**-minimal** jika*

(1) $F \to (G, H)$.
(2) $F - e \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F.

Dengan mengadopsi pembuktian syarat perlu untuk keanggotaan $\mathcal{R}(3K_2, P_3)$ seperti yang telah diperoleh dalam [4], maka dapat ditentukan syarat perlu untuk keanggotaan $\mathcal{R}(3K_2, C_3)$, seperti pada Lema 2.2 – Lema 2.4 berikut.

Lema 2.2. *Misalkan graf $F \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$, maka:*

(1) $F - \{v, w\} \supseteq C_3, \forall\, v, w \in V(F)$.
(2) $F - v - E(C_3) \supseteq C_3, \forall\, v \in V(F)$, dan $\forall\, C_3 \subset F$.
(3) $F - E(2C_3) \supseteq C_3, \forall\, 2C_3 \in F$.
(4) Setiap titik dalam F termuat dalam C_3 di F.

Bukti.

(1) Misalkan terdapat dua titik $v, w \in V(F)$, sedemikian sehingga $C_3 \nsubseteq F - \{v, w\}$. Jika semua sisi yang terkait pada v atau w diwarnai dengan merah, sementara sisi lainnya dari F diwarnai biru, maka diperoleh suatu pewarnaan-$(3K_2, C_3)$ pada F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$.
(2) Misalkan terdapat suatu titik $v \in V(F)$ dan suatu C_3 di F, sedemikian sehingga $C_3 \nsubseteq F - v - E(C_3)$. Jika semua sisi yang terkait pada v bagian (1) diwarnai dengan merah dan sisi dari C_3 diwarnai dengan merah, diperoleh suatu pewarnaan-$(3K_2, C_3)$ pada F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$.
(3) Misalkan sifat (3) tidak berlaku untuk suatu $2C_3$ di F, sedemikian sehingga $C_3 \nsubseteq F - E(2C_3)$. Jika sisi dari $2C_3$ diwarnai merah sementara sisi lainnya diwarnai dengan biru, maka diperoleh suatu pewarnaan-$(3K_2, C_3)$ pada F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$.
(4) Andaikan terdapat satu titik $v \in V(F)$, dimana v tidak termuat dalam C_3 di F. Dari sifat keminimalan F, dapat diperoleh suatu pewarnaan-$(3K_2, C_3)$ dari $F - v$. Dengan menggunakan pewarnaan tersebut terhadap $F - v$ dan semua sisi yang terkait pada v di F diwarnai biru, maka diperoleh pewarnaan-$(3K_2, C_3)$ dari F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$. □

Lema 2.3. *Misalkan graf $F \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$, maka:*

(1) $F - v \to (2K_2, C_3), \forall v \in V(F)$.
(2) $F - E(C_3) \to (2K_2, C_3)$ untuk setiap C_3 di F.

Bukti.

(1) Andaikan terdapat suatu titik $v \in V(F)$ sedemikian sehingga $F - v \nrightarrow (2K_2, C_3)$, maka diperoleh pewarnaan-$(2K_2, C_3)$ pada $F - v$. Dengan menggunakan suatu pewarnaan-$(2K_2, C_3)$ pada $F - v$, jika semua sisi yang terkait pada v di F diwarnai dengan merah, maka diperoleh pewarnaan-$(3K_2, C_3)$ dari F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$.

(2) Andaikan terdapat suatu C_3 di F, sedemikian sehingga $F - E(C_3) \nrightarrow (2K_2, C_3)$, maka diperoleh suatu pewarnaan-$(2K_2, C_3)$ pada $F - v$. Dengan menggunakan suatu pewarnaan-$(2K_2, C_3)$ pada $F - v$, jika semua sisi yang terkait pada C_3 di F diwarnai dengan merah, maka diperoleh pewarnaan-$(3K_2, C_3)$. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$. □

Lema 2.4. *Misalkan F adalah suatu graf tak terhubung yang termuat dalam $\mathcal{R}(3K_2, C_3)$. Maka salah satu komponen F haruslah isomorfik dengan C_3.*

Bukti. Andaikan graf F tidak memuat satu komponen yang isomorfik dengan C_3. Misalkan graf F memuat dua komponen, katakan D_1 dan D_2. Karena graf F tidak memuat komponen yang isomorfik dengan C_3, maka tidak ada komponen C_3 di D_1 atau pun di D_2. Akan tetapi berdasarkan Lema 2.2 (4), setiap titik dalam graf F harus termuat dalam suatu subgraf terhubung yang memuat C_3. Maka haruslah D_1 dan D_2 memuat C_3. Selanjutnya, terdapat sisi $e_1 \in E(D_1)$ dan $e_2 \in E(D_2)$, sehingga $C_3 \subseteq D_1 - e_1$, dan $C_3 \subseteq D_2 - e_2$. Karena $F \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$, maka untuk setiap graf $F - e_1$ dan $F - e_2$, diperoleh suatu pewarnaan-$(3K_2, C_3)$, katakan ℓ_1 dan ℓ_2. Untuk pewarnaan ℓ_1, $D_1 - e_1$ harus memuat paling sedikit satu sisi merah dan D_2 mempunyai pewarnaan-$(2K_2, C_3)$. Karena jika tidak demikian, $F - e_1$ akan memuat $3K_2$ merah atau C_3 biru, kontradiksi dengan sifat keminimalan dari F. Untuk pewarnaan ℓ_2, $D_2 - e_2$, harus memuat paling sedikit satu sisi merah dan D_1 mempunyai pewarnaan-$(2K_2, C_3)$. Sehingga dapat diperoleh pewarnaan-$(3K_2, C_3)$ dari F, jika F diwarnai dengan menggunakan pewarnaan ℓ_1 pada D_2 dan ℓ_2 pada D_1. Hal ini kontradiksi dengan sifat keminimalan dari F. □

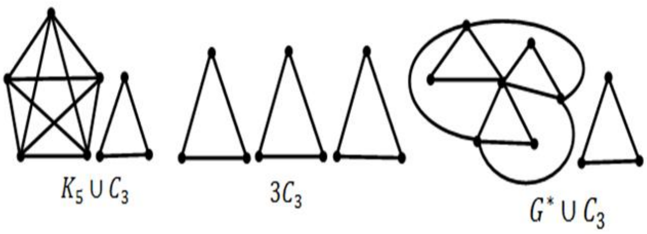
3. Graf $F \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$

Pada bagian ini ditentukan beberapa graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, C_3)$.

Teorema 3.1. *Diberikan $3K_2$ dan C_3, maka $\mathcal{R}(3K_2, C_3) \supseteq \{K_5 \cup C_3, 3C_3, G^* \cup C_3\}$.*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $K_5 \cup C_3 \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$. Untuk graf $3C_3$ dan $G \cup C_3$ pembuktian dilakukan dengan cara serupa. Akan ditunjukkan bahwa $K_5 \cup C_3 \rightarrow (3K_2, C_3)$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi $K_5 \cup C_3$. Misalkan tidak terdapat $3K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi merah berbentuk $K_{1,4}$ atau C_3. Untuk setiap kemungkinan tersebut selalu diperoleh C_3 biru. Sehingga $K_5 \cup C_3 \rightarrow (3K_2, C_3)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(K_5 \cup C_3)^* := K_5 \cup C_3 - e \nrightarrow (3K_2, C_3)$ untuk sebarang $e \in E(K_5 \cup C_3)$. Misalkan sisi $e \in E(K_5)$ maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi merah memuat segitiga yang menghubungkan tiga titik dengan derajat empat di $(K_5 \cup C_3)^*$. Misalkan sisi $e \in E(C_3)$ maka subgraf yang diinduksi oleh

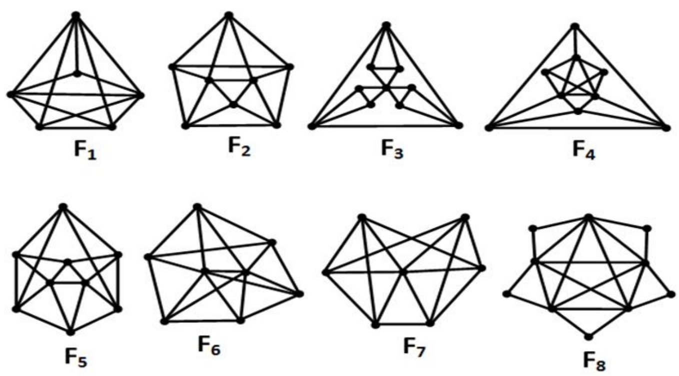


Gambar 1. $\{K_5 \cup C_3, 3C_3, G^* \cup C_3\} \subseteq \mathcal{R}(3K_2, C_3)$.

sisi-sisi merah memuat $K_2 \cup C_3$ di $(K_5 \cup C_3)^*$. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi biru tidak memuat C_3 di $(K_5 \cup C_3)^*$. Sehingga $(K_5 \cup C_3)^* \nrightarrow (3K_2, C_3)$, dan dapat disimpulkan bahwa $K_5 \cup C_3 \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$. Dapat dilihat bahwa $K_5, 2C_3$ dan $G^* \cup C_3$ adalah anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_3)$. □

Pada Teorema 3.2 berikut diperoleh beberapa graf yang *tidak* berasal dari anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_3)$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, C_3)$ seperti pada Gambar 2.

Teorema 3.2. *Diberikan graf* $3K_2$ *dan* C_3*, maka* $\mathcal{R}(3K_2, C_3) \supseteq \{F_1, F_2, \cdots, F_8\}$*, untuk* $F_1, F_2, \cdots, F_8$*, adalah graf-graf seperti pada Gambar 2.*



Gambar 2. $\{F_1, F_2, \cdots, F_8\} \subseteq \mathcal{R}(3K_2, C_3)$

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa F_1 dan F_8 adalah anggota $\mathcal{R}(3K_2, C_3)$. Untuk graf $F_2, F_3, \ldots, F_7$, pembuktian dilakukan dengan cara serupa. Akan ditunjukkan bahwa $F_1 \rightarrow (3K_2, C_3)$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap F_1. Misalkan tidak terdapat $3K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi merah berbentuk $K_{1,5}$, $K_{1,4}$ atau $K_{1,3}$. Untuk setiap kemungkinan tersebut selalu diperoleh C_3 biru. Sehingga $F_1 \rightarrow (3K_2, C_3)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $F_1^* := F_1 - e \nrightarrow (3K_2, C_3)$ untuk sebarang $e \in E(F_1)$. Notasikan $V(F_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(F_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_1v_6, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_5, v_3v_6\}$. Misal $e = v_1v_3$ atau $e = v_2v_6$. Maka warnai sisi-sisi $v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5$ atau $v_1v_5, v_2v_5, v_3v_5, v_4v_5$ dengan merah, sementara sisi lainnya diwarnai biru sedemikian sehingga tidak diperoleh C_3 biru dalam pewarnaan tersebut. Untuk $e = v_1v_4$ atau $e = v_3v_5$ pembuktian dilakukan dengan cara serupa. Jika $e = v_2v_3$ atau $e = v_3v_6$ maka sisi $v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5$ atau $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6$ diwarnai merah. Jika $e = v_2v_4$ atau v_2v_5 maka warnai sisi-sisi $v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6$ atau $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6$ dengan merah. Sehingga diperoleh $F_1^* \nrightarrow (3K_2, C_3)$. Maka $F_1 \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$.

Akan ditunjukkan bahwa $F_8 \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap F_8. Misalkan tidak terdapat $3K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi merah berbentuk $K_{1,6}$ atau $K_{1,2}$. Untuk setiap kemungkinan tersebut selalu diperoleh C_3 biru. Sehingga $F_8 \rightarrow (3K_2, C_3)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $F_8^* := F_8 - e \nrightarrow (3K_2, C_3)$ untuk sebarang $e \in E(F_8)$. Notasikan $V(F_8) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ dan $E(F_8) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_{10}, v_1v_{10}, v_1v_3, v_1v_5, v_1v_7, v_1v_9, v_3v_5, v_3v_7, v_3v_9, v_5v_7, v_5v_9, v_7v_8, v_7v_9, v_9v_{10}\}$. Misalkan sisi $e = v_1v_3$ atau $e = v_3v_5$ maka warnai sisi $v_1v_9, v_3v_9, v_5v_9, v_7v_9, v_8v_9, v_9v_{10}$ atau $v_1v_7, v_3v_7, v_5v_7, v_6v_7, v_7v_8, v_7v_9$ dengan merah, sementara sisi lainnya diwarnai biru sedemikian sehingga tidak diperoleh C_3 biru dalam pewarnaan tersebut. Untuk $e = v_3v_7$ atau $e = v_7v_8$ pembuktian dilakukan dengan cara serupa. Jika sisi $e = v_5v_7$ atau $e = v_7v_9$ maka warnai sisi $v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_7, v_3v_9$ atau $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_5, v_1v_7, v_1v_9, v_1v_{10}$ dengan merah. Sehingga diperoleh $F_8^* \nrightarrow (3K_2, C_3)$. Maka $F_8 \in \mathcal{R}(3K_2, C_3)$. □

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy, Bapak Dr. Muhafzan, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, dan Bapak Dr. Dodi Devianto yang telah memberikan masukan dan saran sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Burr, S. A., Erdos, P., dan Lovasz, L., (1976): On Graphs of Ramsey Type, *Ars Combinatoria*, **1**: 167 – 190

[2] Burr, S. A., Erdos, P., Faudree, R. J., dan Schelp, R. H, (1978): A Class of Ramsey-finite graphs, *Congressus Number.*, **21**: 171 – 180

[3] Burr, S. A., Erdos, P., Faudree, R. J., dan Schelp, R. H., (1981): Ramsey-Minimal graphs for Matching, *Theory and Applications of Graphs*, G.Chartrand ed., 159 – 168

[4] Muhshi, H., dan Baskoro, E. T., (2012): On Ramsey $(3K_2, P_3)$-minimal graphs, *AIP Conf. Proc.* **1450**: 110 – 117.