Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **2** Hal. 46 – 50
ISSN : 2303–2910
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

OBSERVER LINIER POSITIF UNTUK SISTEM LINIER POSITIF

TRI UTAMI, ZULAKMAL

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
triutami55@gmail.com

Abstrak. Suatu *observer* untuk sistem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),\\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t),\ t \geq 0\end{aligned} \tag{0.1}$$

didefinisikan sebagai suatu persamaan diferensial yang berbentuk

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}}(t) = (A - EC)\widehat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + E\mathbf{y}(t), \tag{0.2}$$

untuk suatu matriks $E \in \mathbb{R}^{n\times p}$, dimana $\widehat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$ berperan sebagai estimator untuk vektor keadaan $\mathbf{x}(t)$ dengan estimasi error $\varepsilon(t)$ adalah

$$\varepsilon(t) = \widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t).$$

Estimasi yang baik mestilah memenuhi $\varepsilon(t) \to \mathbf{0}$ bila $t \to \infty$, atau $\widehat{\mathbf{x}}(t) \to \mathbf{x}(t)$ bila $t \to \infty$. Jika sistem (0.1) adalah positif, persamaan (0.2) dikatakan *observer* linier positif untuk sistem (0.1) jika $\widehat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n_+$. Pada makalh ini akan dikaji masalah penentuan *observer* linier positif untuk sistem linier positif. Akan dikaji syarat yang menjamin eksistensi matriks $E \in \mathbb{R}^{n\times p}_+$ sedemikian sehingga $\widehat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n_+$ dan $\varepsilon(t) \to \mathbf{0}$ bila $t \to \infty$.

Kata Kunci: Sistem linier positif, observer, matriks Metzler

1. Pendahuluan

Diberikan suatu sistem kontrol linier

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),\\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t),\ t \geq 0\end{aligned} \tag{1.1}$$

dimana $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaan, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ menyatakan vektor kontrol dan $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ menyatakan vektor output. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dan $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Sistem (1.1) dikatakan positif jika $\mathbf{x}(t)$ dan $\mathbf{y}(t)$ adalah nonnegatif untuk setiap keadaan awal nonnegatif $\mathbf{x}_0$ dan setiap kontrol nonnegatif $\mathbf{u}(t), t \geq 0$ [2]. Dalam [5], dinyatakan bahwa sistem (1.1) adalah positif jika dan hanya jika $A \in \mathcal{M}^n$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$ dan $C \in \mathbb{R}^{p\times n}_+$.

Suatu *observer* untuk sistem (1.1) didefinisikan sebagai suatu persamaan diferensial yang berbentuk sebagai berikut:

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}}(t) = (A - EC)\widehat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + E\mathbf{y}(t), \tag{1.2}$$

untuk suatu matriks $E \in \mathbb{R}^{n\times p}$, dimana $\widehat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$ [2]. Dalam [2] dinyatakan bahwa vektor $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ berperan sebagai estimator untuk vektor keadaan $\mathbf{x}(t)$ dengan estimasi error $\varepsilon(t)$ adalah

$$\varepsilon(t) = \widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t).$$

Estimasi yang baik mestilah memenuhi $\varepsilon(t) \to \mathbf{0}$ bila $t \to \infty$, atau $\widehat{\mathbf{x}}(t) \to \mathbf{x}(t)$ bila $t \to \infty$. Jika sistem (1.1) adalah positif, persamaan (1.2) dikatakan *observer* linier positif untuk sistem (1.1) jika $\widehat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n_+$. Pada makalh ini akan dikaji masalah penentuan *observer* linier positif untuk sistem linier positif. Akan dikaji syarat yang menjamin eksistensi matriks $E \in \mathbb{R}^{n\times p}_+$ sedemikian sehingga $\widehat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n_+$ dan $\varepsilon(t) \to \mathbf{0}$ bila $t \to \infty$.

2. *Observer* Linier Positif untuk Sistem Linier Positif

Berikut diberikan definisi matriks Metzler.

Definisi 2.1. *Suatu matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan matriks Metzler jika semua entri selain diagonal utamanya adalah nonnegatif, yaitu $a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*

Teorema 2.2. *Misalkan A adalah suatu matriks Metzler, maka terdapat suatu $\mu_0 \in \mathbb{R}$ dan suatu $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n_+$ sedemikian sehingga*

(1) $A\boldsymbol{x}_0 = \mu_0 \boldsymbol{x}_0$.
(2) Jika $\mu \neq \mu_0$ adalah nilai eigen lain dari A, maka $Re(\mu) < \mu_0$.

Dari sistem (1.1), misalkan matriks A adalah nonnegatif. Sistem (1.1) dikatakan stabil asimtotik jika solusinya menghampiri 0 bila t menuju tak hingga, yaitu $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$. Dalam beberapa literatur dinyatakan bahwa untuk menguji kestabilan asimtotik dari sistem (1.1) cukup dengan melihat nilai eigen dari matriks A. Jika bagian riil dari semua nilai eigen dari matriks A adalah negatif maka sistem (1.1) adalah stabil asimtotik, demikian juga sebaliknya [4].

Lema berikut memberikan kondisi stabil untuk matriks Metzler:

Lema 2.3. *Suatu matriks Metzler $A \in \mathcal{M}^n$ adalah stabil asimtotik jika semua elemen diagonalnya negatif.*

Berikut disajikan syarat perlu dan syarat cukup untuk eksistensi *observer* linier positif konvergen untuk sisitem linier positif dengan output tunggal.

Lema 2.4. *Diberikan suatu matriks Metzler $A \in \mathcal{M}^n$ dan suatu matriks nonnegatif $C \in \mathbb{R}^{1\times n}_+$. Jika terdapat matriks nonnegatif $E \in \mathbb{R}^{n\times 1}_+$ sedemikian sehingga $(A - EC)$ adalah matriks Metzler stabil asimtotik, maka*

$$a_{ii}c_j < a_{ij}c_i, \forall i, \forall j \neq i, \text{ sedemikian sehingga } c_j \neq 0. \tag{2.1}$$

Bukti. Pilih matriks $E \in \mathbb{R}_+^{n\times 1}$, dengan

$$E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

dimana $e_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$ dan ada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sedemikian sehingga $e_j > 0$. Karena diinginkan $(A - EC) \in \mathcal{M}^n$ maka matriks $(a_{ij} - e_i c_j) \geq 0, \forall i \neq j$, atau dapat ditulis

$$e_i c_j \leq a_{ij}, \forall i \neq j. \tag{2.2}$$

Selanjutnya, karena diinginkan pula matriks $(A-EC)$ adalah stabil asimtotik, maka haruslah $a_{ii} - e_i c_i < 0, \forall i$, atau dapat ditulis

$$e_i c_i > a_{ii}. \tag{2.3}$$

Jika $c_i > 0$ dan $c_j > 0$, maka dari (2.3) diperoleh

$$a_{ii} c_j < e_i c_i c_j,$$

dan dari (2.2) diperoleh

$$a_{ii} c_j < e_i c_i c_j < a_{ij} c_i,$$

yang memperlihatkan hubungan (2.1) terpenuhi. □

Teorema berikut memberikan syarat yang menjamin eksistensi matriks E untuk *observer* linier positif konvergen.

Teorema 2.5. *Diberikan suatu matriks Metzler $A \in \mathcal{M}^n$ dan suatu matriks nonnegatif $C \in \mathbb{R}_+^{1\times n}$. Misalkan $E \in \mathbb{R}_+^{n\times 1}$ adalah suatu matriks nonnegatif dengan entri-entri e_i sedemikian sehingga*

$$e_i > \frac{a_{ii}}{c_i}, \ \textit{jika } c_j = 0, \forall j \neq i, \tag{2.4}$$

$$e_i = \min_{j\neq i, c_j \neq 0} \{\frac{a_{ij}}{c_j}\}, \ \textit{jika } c_j \neq 0. \tag{2.5}$$

Maka terdapat observer linier positif konvergen untuk sistem (1.1) jika dan hanya jika $\lambda_{\max}(A - EC) < 0$.

Bukti. ($\Leftarrow$) Pemilihan matriks $E \in \mathbb{R}_+^n$ dengan entri-entri yang memenuhi (2.4) dan (2.5) menjamin bahwa $(A - EC)$ merupakan suatu matriks Metzler. Karena $\lambda_{\max}(A-EC) < 0$, maka matriks $(A-EC)$ adalah stabil asimtotik, sehingga matriks E ini dapat digunakan untuk membentuk suatu *observer* linier positif konvergen.
($\Rightarrow$) Misalkan

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (A - EC)\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + E\mathbf{y}(t)$$

adalah suatu *observer* linier positif konvergen untuk sistem (1.1), maka $(A - EC)$ adalah matriks Metzler dan stabil asimtotik. Karena $(A - EC)$ adalah matriks

Metzler, maka matriks $(A-EC)$ memiliki nilai eigen riil terbesar λ_{max} sedemikian sehingga $Re(\lambda) < \lambda_{max}$ untuk setiap $\lambda \in \{\gamma : \det(A-EC-\gamma I) = 0\}$. Selanjutnya, karena $(A-EC)$ merupakan matriks yang stabil asimtotik maka $Re(\lambda) < 0$ untuk setiap $\lambda \in \{\gamma : \det(A-EC-\gamma I) = 0\}$. Akibatnya $\lambda_{max} < 0$. □

Contoh berikut akan mengilustrasikan suatu sistem yang memiliki *observer* dengan $n \geq 3$:

Contoh 1. *Diberikan suatu sistem linier, dimana*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Misalkan $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$, maka

$$\begin{aligned}(A-EC) &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_1 & 2e_1 & e_1 \\ e_2 & 2e_2 & e_2 \\ e_3 & 2e_3 & e_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks

$$E = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

dengan demikian

$$\begin{aligned}(A-EC) &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dari matriks $(A-EC)$ diperoleh $\lambda_{max}(A-EC) = -1$, maka terdapat suatu *observer* linier positif konvergen untuk sistem linier positif (1.1). *Observer*nya adalah

$$\begin{pmatrix} \dot{\widehat{x}}_1(t) \\ \dot{\widehat{x}}_2(t) \\ \dot{\widehat{x}}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x}_1(t) \\ \widehat{x}_2(t) \\ \widehat{x}_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} y(t),$$

dan persamaan errornya adalah

$$\dot{\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \varepsilon(t).$$

3. Penutup

Syarat yang menjamin eksistensi *observer* linier positif konvergen untuk sistem linier positif adalah terdapatnya entri-entri matriks E yang memenuhi hubungan

$$e_i > \frac{a_{ii}}{c_i},\ jika\ c_j = 0, \forall j \neq i,$$

$$e_i = \min_{j \neq i, c_j \neq 0} \{\frac{a_{ij}}{c_j}\},\ jika\ c_j \neq 0$$

sedemikian sehingga $\lambda_{\max}(A - EC) < 0$.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Bukti Ginting, M.Si, dan Bapak Efendi, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kedelapan Jilid-1*. Erlangga, Jakarta

[2] Bastian. G. and N. Dautrebande. 1999. Positive Linear Observers for Positive Linear Systems. *Proceedings European Control Conference ECC'99, Paper* **F371**, Germany

[3] D. G. Luenberger. 1979. *Introduction to Dynamic Systems*. John Wiley and Sons. New York

[4] Hendricks. Elbert, Ole. Jannerup dan P. H. Sorensen. 2008. *Linear Systems Control*. Springer

[5] Kaczorek, T. 2012. Existence and Determination of The Set of Metzler Matrices for Given Stable Polynomials. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sience*. **22** (**2**): 389 – 399

[6] Leenheer. P. dan D. Aeyels. 2001. Stabilization of Positive Linear Systems. *Systems and Control Letters*. **44**: 259 – 271