PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA GRAF BINTANG

DINA IRAWATI

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 irawatidina@yahoo.com*

Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Banyaknya titik di G adalah p dan banyaknya sisi di G adalah q . Suatu graf G adalah total sisi ajaib jika terdapat pemetaan bijektif λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, \dots, p+q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi xy di G berlaku $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$, k adalah konstan. Pada jurnal ini penulis mengkaji tentang pelabelan total sisi ajaib pada graf bintang.

Kata Kunci: Pelabelan total sisi ajaib, graf bintang.

1. Pendahuluan

Teori graf adalah cabang kajian yang mempelajari sifat-sifat graf. Suatu graf adalah himpunan benda-benda yang disebut titik (*vertex*) yang terhubung oleh sisi (*edge*) atau busur (*arc*). Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik (melambangkan simpul) yang dihubungkan oleh garis-garis (melambangkan sisi) atau garis berpanah (melambangkan busur). Suatu sisi dapat menghubungkan suatu titik dengan titik yang sama. Sisi yang demikian dinamakan gelang (*loop*).

Dalam teori graf, pelabelan menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah peta jaringan jalan raya, jaringan internet, sistem alamat jaringan komunikasi, dan desain sirkuit [2]. Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan titik-titik di G dan E adalah himpunan sisi-sisi yang menghubungkan dua titik di G . Suatu pelabelan total sisi ajaib pada suatu graf (V, E) dengan banyak titik $|V(G)| = p$ dan banyak sisi $|E(G)| = q$ adalah pemetaan satu-satu λ dari $V \cup E$ ke $\{1, 2, \dots, p+q\}$ sehingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$, untuk suatu konstanta k .

2. Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Bintang

Graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf dengan $n + 1$ titik, dengan satu titik berderajat n , yang dinamakan *titik pusat*, dan n titik berderajat satu, yang dinamakan *daun*. Pada Lema 2.1 berikut diberikan syarat untuk label titik pusat graf bintang pada suatu pelabelan total sisi ajaib.

Lema 2.1. *Pada pelabelan total sisi ajaib graf bintang, label titik pusatnya adalah $1, n + 1$, atau $2n + 1$.*

Bukti. Diberikan graf bintang $K_{1,n}$ seperti pada gambar berikut.

Gambar 1. Graf bintang $K_{1,n}$

Akan ditunjukkan bahwa pada pelabelan ajaib suatu graf bintang $K_{1,n}$, label titik pusat adalah $1, n + 1$, atau $2n + 1$. Misalkan titik pusat dilabeli dengan x , yaitu $\lambda(c) = x$. Titik-titik lainnya dilabeli dengan $1, 2, 3, \dots, n$. Sisi-sisinya dilabeli dengan $(n + 1), (n + 2), (n + 3), \dots, (2n + 1)$. Maka

$$kn = (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + n) + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \dots + (2n + 1).$$

Karena label titik pusat x termasuk di antara label titik $1, 2, 3, \dots, n$, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned} kn &= (n - 1)x + 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \dots + (2n + 1), \\ &= (n - 1)x + \frac{1}{2}(2n + 1)(2n + 2), \\ &= (n - 1)x + (n + 1)(2n + 1), \\ &= (nx - x) + (n + 1)(2n + 1). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Reduksi (2.1) dengan modulo n , diperoleh:

$$x \equiv (n + 1)(2n + 1) \equiv 1.$$

Jadi diperoleh label titik pusat adalah $1, (n + 1)$, atau $(2n + 1)$.

Ilustrasi untuk masing-masing label titik pusat dapat dilihat sebagai berikut.

- Titik pusat diberi label 1,
Bila titik pusat diberi label 1 yaitu $\lambda(c) = 1$, maka titik-titik lainnya diberi label $2, 3, 4, \dots, n+1$. Kemudian untuk label sisi, dicari bobot sisi yang maksimum di antara sisi-sisi lainnya, dan sisi tersebut diberi label $n+2$. Selanjutnya dicari lagi bobot sisi yang maksimum di antara sisi-sisi lainnya yang belum diberi label, dan sisi tersebut diberi label $n+3$. Langkah ini dilakukan berulang sampai semua sisi memiliki label. Dalam hal ini, pelabelan total sisi yang diperoleh untuk masing-masing sisi adalah sama yaitu $2n+4$. Sehingga diperoleh bilangan ajaibnya $2n+4$. Seperti pada gambar berikut.

Gambar 2. Graf bintang $K_{1,n}$ dengan $\lambda(c) = 1$

- Titik pusat diberi label $n+1$,
Bila titik pusat diberi label $n+1$ yaitu $\lambda(c) = n+1$, maka titik-titik lainnya diberi label $1, 2, 3, \dots, n$. Kemudian untuk label sisi, dicari bobot sisi yang maksimum diantara sisi-sisi lainnya, dan sisi tersebut diberi label $n+2$. Selanjutnya dicari lagi bobot sisi yang maksimum diantara sisi-sisi lainnya yang belum diberi label, dan sisi tersebut diberi label $n+3$. Langkah ini dilakukan berulang sampai semua sisi memiliki label. Dalam hal ini, pelabelan total sisi yang diperoleh untuk masing-masing sisi adalah sama yaitu $3n+3$. Sehingga diperoleh bilangan ajaibnya $3n+3$. Seperti pada gambar berikut.
- Titik pusat diberi label $2n+1$,
Bila titik pusat diberi label $2n+1$ yaitu $\lambda(c) = 2n+1$, maka titik-titik lainnya diberi label $2n-1, 2n-2, 2n-3, \dots, 2n$. Kemudian untuk label sisi, dicari bobot sisi yang minimum diantara sisi-sisi lainnya, dan sisi tersebut diberi label n . Selanjutnya dicari lagi bobot sisi yang minimum diantara sisi-sisi lainnya yang belum diberi label, dan sisi tersebut diberi label $n-1$. Langkah ini dilakukan berulang sampai semua sisi memiliki label. Dalam hal ini, pelabelan total sisi yang diperoleh untuk masing-masing sisi adalah sama yaitu $4n+2$. Sehingga diperoleh bilangan ajaibnya $4n+2$. Seperti pada gambar berikut.

Gambar 3. Graf bintang $K_{1,n}$ dengan $\lambda(c) = n + 1$ Gambar 4. Graf bintang $K_{1,n}$ dengan $\lambda(c) = 2n + 1$

Berdasarkan penjelasan di atas maka terbukti bahwa pelabelan ajaib pada graf bintang, label titik pusatnya adalah $1, n + 1$, atau $2n + 1$. $\square$

Teorema 2.2. Terdapat $3 \cdot 2^n$ pelabelan ajaib pada graf $K_{1,n}$ yang sama.

Bukti. Misalkan diberikan graf bintang $K_{1,n}$ dengan

$$V(K_{1,n}) = \{\{c\} \cup \{v_i\} | 1 \leq i \leq n\},$$

$$E(K_{1,n}) = \{cv_i | 1 \leq i \leq n\}.$$

Berdasarkan Lema 2.1, kasus yang mungkin untuk pelabelan ajaib adalah $\lambda(c) = 1$, dengan bilangan ajaib $k = 2n + 4$, atau $\lambda(c) = n + 1$, dengan bilangan ajaib $k = 3n + 3$, atau $\lambda(c) = 2n + 1$, dengan bilangan ajaib $k = 4n + 2$.

Selanjutnya akan ditinjau masing-masing kasus di atas.

- $\lambda(c) = 1$,

Karena pelabelan pada graf $K_{1,n}$ adalah pelabelan ajaib, maka jumlah dari $\lambda(v_i) + \lambda(e_i)$ harus sama dengan M , dimana $M = k - \lambda(c)$. Sehingga

diperoleh:

$$M = 2n + 4 - 1 = 2n + 3.$$

Akibatnya dalam kasus ini terdapat tepat satu cara untuk mempartisi $2n + 1$ bilangan bulat, yaitu $1, 2, 3, \dots, 2n + 1$ ke dalam $n + 1$ himpunan

$$\{\lambda(c), \{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_n, b_n\}\}$$

di mana setiap $a_i + b_i = M$ dan $a_i = \lambda(v_i)$, $b_i = \lambda(e_i)$.

Untuk mempermudah, pilih label sedemikian sehingga $a_i < b_i$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Kemudian asumsikan bahwa $\{\lambda(v_i), \lambda(e_i)\} = \{a_i, b_i\}$. Masing-masing n himpunan terdapat dua pilihan, yang bersesuaian dengan $\lambda(v_i) = a_i$ atau $\lambda(v_i) = b_i$, sehingga diperoleh 2^n pelabelan sisi ajaib pada graf bintang $K_{1,n}$ untuk $\lambda(c) = 1$.

Dengan cara yang sama untuk $\lambda(c) = n + 1$ dan $\lambda(c) = 2n + 1$, diperoleh pula 2^n pelabelan ajaib pada graf bintang $K_{1,n}$. Sehingga masing-masing tiga nilai dari $\lambda(c)$ memberikan 2^n pelabelan ajaib pada graf bintang $K_{1,n}$. Jadi, diperoleh $3 \cdot 2^n$ pelabelan sisi ajaib pada graf bintang $K_{1,n}$ yang sama. $\square$

3. Kesimpulan

Pada pelabelan sisi ajaib terhadap graf bintang $K_{1,n}$, terdapat tiga kemungkinan label untuk titik pusat, yaitu $1, n + 1$, atau $2n + 1$. Pada masing-masing kasus tersebut diperoleh bilangan ajaib sebagai berikut, $\lambda(c) = 1$, dengan bilangan ajaib $k = 2n + 4$, $\lambda(c) = n + 1$, dengan bilangan ajaib $k = 3n + 3$, dan $\lambda(c) = 2n + 1$, dengan bilangan ajaib $k = 4n + 2$. Selanjutnya, telah ditunjukkan kembali bahwa untuk setiap kemungkinan label untuk titik pusat tersebut, terdapat 2^n kemungkinan pelabelan ajaib pada $K_{1,n}$. Sehingga diperoleh $3 \cdot 2^n$ kemungkinan bentuk bentuk pelabelan sisi ajaib pada graf bintang $K_{1,n}$.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Efendi, M.Si, dan Bapak Syafruddin, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G. & Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.
- [2] Munir, Rinaldi. 2003. *Matematika Diskrit*. Informatika Bandung. Bandung.
- [3] Wallis, W. D, dkk. 2000. Edge-Magic Total Labelings. *Australasian Journal of Combinatorics* **22**: pp 177 – 190.