Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **3** Hal. 17 – 24
ISSN : 2303–2910
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

PENENTUAN HARGA OPSI EROPA DENGAN MENGGUNAKAN METODE GERAK BROWN (KASUS SAHAM PENUTUPAN HARIAN DI PT. ASTRA ARGO LESTARI TBK.)

NELFI

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
nelfimathunand@gmail.com

Abstrak. Opsi adalah suatu kontrak yang memberikan hak kepada pemilik opsi untuk membeli (*opsi call*) atau menjual (*opsi put*) suatu saham kepada penerbit opsi dengan harga tertentu dan pada waktu jatuh tempo tertentu. Oleh karena itu, penerbit opsi harus menentukan harga opsi terlebih dahulu untuk menghindari kerugian. Dalam penelitian ini, harga opsi Eropa ditentukan dengan menggunakan fungsi *payoff* dan diasumsikan bahwa pergerakan harga saham mengikuti gerak Brown geometri. Nilai ekspektasi dan nilai volatilitas dari sekumpulan harga saham juga diperlukan dalam menentukan harga opsi. Kedua nilai ini dapat ditentukan dengan menggunakan metode *maximum likelihood estimation*. Data harga saham penutupan PT. Astra Agro Lestari Tbk. digunakan dalam penelitian ini untuk memprediksi harga opsi dari saham perusahaan PT. Astra Agro Lestari Tbk.

Kata Kunci: Opsi Eropa, fungsi *payoff*, gerak Brown geometri, *Maximum likelihood estimation*

1. Pendahuluan

Ilmu matematika dapat diaplikasikan dalam berbagai hal, salah satunya adalah dalam masalah investasi. Pada umumnya investasi dibedakan menjadi dua, yaitu investasi pada aset-aset finansial (*financial assets*) dan investasi pada aset-aset riil (*real assets*). Investasi pada aset-aset finansial dapat dilakukan pada pasar uang seperti sertifikat dan deposito dan juga dapat dilakukan pada pasar modal, seperti saham dan obligasi. Para investor yang ingin melakukan investasi akan lebih memilih berinvestasi dalam bentuk saham, karena saham mampu memberikan keuntungan yang menarik. Selain berinvestasi dengan cara memiliki saham secara langsung dari pasar saham, investor juga dapat berinvestasi dengan cara membeli turunan dari nilai saham *(financial derivative)*. Salah satu jenis produk *financial derivative* yang telah banyak dikenal dan diperdagangkan oleh masyarakat adalah opsi.

Opsi adalah kontrak yang memberikan hak kepada pemilik opsi (*holder*) untuk membeli atau menjual sejumlah aset tertentu pada penerbit opsi (*writer*) dengan harga tertentu, pada waktu tertentu [2]. Berdasarkan waktu pelaksanaannya opsi dibedakan menjadi dua, yaitu opsi tipe Eropa dan opsi tipe Amerika. Berdasarkan

hak yang diberikan kepada pemegang opsi, opsi dibedakan menjadi dua, yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Dalam penulisan ini, hanya akan dibahas opsi tipe Eropa saja. Opsi *call* Eropa adalah opsi yang memberikan hak kepada pemilik opsi untuk membeli suatu aset dari penerbit opsi dengan harga tertentu dan pada waktu yang telah ditentukan di masa datang dan opsi *put* Eropa adalah opsi yang memberikan hak kepada pemilik opsi untuk menjual aset kepada penerbit opsi dengan harga tertentu dan pada waktu yang telah ditentukan di masa datang [4].

Pada penelitian ini, harga opsi Eropa ditentukan dengan menggunakan *metode Gerak Brown Geometri*. Dalam hal ini pergerakan harga saham di masa yang akan datang diasumsikan mengikuti model gerak Brown geometri yang bergantung pada waktu. Gerak Brown merupakan suatu proses stokastik dimana suatu perubahan terjadi di waktu yang sangat singkat dan nilai pada saat ini berpengaruh terhadap nilai yang akan datang. Harga opsi dihitung menggunakan fungsi *payoff* dan prediksi pergerakan saham tersebut. Dalam penelitian ini, data yang digunakan adalah data harga saham penutupan harian di PT. Astra Agro Lestari Tbk. yang bergerak di bidang perkebunan selama 100 hari [1].

2. Fungsi Payoff

Harga opsi Eropa dapat ditentukan dengan tiga kasus yang mungkin terjadi, yaitu:

(1) Harga saham lebih besar dari harga kesepakatan $(S(T) > K)$
Kondisi ini disebut juga sebagai *in the money* untuk opsi *call*, dengan nilai *payoff* adalah $V = S(T) - K > 0$. Sedangkan untuk opsi *put* kondisi ini disebut juga sebagai *out of the money*, nilai *payoff* adalah $V = 0$.

(2) Harga saham lebih kecil dari harga kesepakatan $(S(T) < K)$
Kondisi ini disebut juga *out of the money* untuk opsi *call*, dimana nilai *payoff* adalah $V = 0$. Sedangkan untuk opsi *put* kondisi ini disebut juga sebagai *in the money*, dengan nilai *payoff* adalah $V = K - S(T) > 0$.

(3) Harga saham sama dengan harga kesepakatan $(S(T) = K)$
Kondisi ini disebut juga *at the money*. Pada kasus ini tidak ada perbedaan antara penerbit opsi yang menggunakan haknya untuk membeli saham (pada opsi *call*) atau menjual saham (pada opsi *put*) karena akan memberikan nilai *payoff* $V = 0$.

Berdasarkan kasus di atas dapat disimpulkan nilai *payoff* secara umum yaitu:

$$V(S(T), K) = \max\{d(K - S(T), 0\} \text{ dimana } d = \begin{cases} -1, & \text{untuk opsi call,} \\ 1, & \text{untuk opsi put,} \end{cases} \quad (2.1)$$

dengan V adalah harga opsi *Call /Put*, $S(T)$ adalah harga saham pada jatuh tempo T, K adalah harga kesepakatan.

3. Tingkat Suku Bunga

Misalkan r adalah suku bunga tahunan yang nilainya selalu positif $(r > 0)$ dan besar tabungan setelah t periode dinotasikan sebagai X_t. Jika pembayaran yang dilakukan merupakan fungsi kontinu, maka besar tabungan setelah t periode adalah

$$X_t = X_0 \lim_{n\to\infty} \left((1 + \frac{r}{n})\right)^{nt} = X_0 \exp(rt). \tag{3.1}$$

dengan X_0 adalah besar tabungan diawal periode. Persamaan (3.1) ini juga dapat ditulis menjadi

$$X_0 = \exp(-rt)X_t \tag{3.2}$$

dengan $\exp(-rt)$ disebut sebagai faktor terdiskon [8].

4. Distribusi Normal dan Lognormal

Definisi 4.1. [9] *Peubah acak X dikatakan mengikuti distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2, dinotasikan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, jika mempunyai fungsi kepekatan*

$$f(x : \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^2},$$

untuk $-\infty < x < \infty$, dengan $-\infty < \mu < \infty$ dan $\sigma > 0$.

Distribusi lognormal merupakan perluasan dari distribusi normal. Menurut Harinaldi [3], suatu peubah acak kontinu non-negatif X dikatakan distribusi lognormal jika $\ln(X)$ distribusi normal. Fungsi kepekatan peluang dari suatu peubah acak yang memenuhi distribusi lognormal jika $\ln(X)$ terdistribusi normal dengan parameter μ dan σ adalah

$$f_{ln}(x : \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln(x)-\mu)}{\sigma}\right)^2}, \text{ untuk } x \geqslant 0 \text{ dan } \sigma > 0.$$

5. Gerak Brown

Definisi 5.1. [7] *Suatu gerak brown $\{W(t), t \geqslant 0\}$ adalah proses stokastik yang memiliki sifat-sifat berikut*

(1) $W(0) = 0$.
(2) Untuk $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, maka increment $W(t_n) - W(t_{n-1}), \ldots, W(t_2) - W(t_1)$ saling bebas.
(3) Untuk $t > 0, W(t)$ berdistribusi $N(0, c^2t)$ dengan mean 0 dan variansi c^2t, dimana c adalah suatu konstanta positif.

Secara umum menurut Hsu [5], gerak Brown yang *mean* sama dengan nol dan variansi sama dengan satu dinamakan gerak Brown baku. Gerak Brown baku ini dikenal juga dengan proses Wiener yaitu salah satu proses stokastik yang dapat diaplikasikan pada teori probabilitas yang bergantung terhadap waktu. Menurut Ross [7], jika $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah gerak Brown, maka proses $\{Y(t), t \geq 0\}$ yang didefeniskan dengan $Y(t) = \exp(X(t))$ disebut gerak Brown geometri.

6. Pembahasan

6.1. *Pemodelan Harga Saham dengan Metode Gerak Brown*

Pada penelitian ini, diasumsikan bahwa pergerakan saham pada pasar saham mengikuti model gerak Brown geometri. Dalam hal ini, model harga saham yang dipengaruhi oleh nilai *mean* μ dan standar deviasi σ dengan masing-masing bergantung pada harga saham S dan waktu t, dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{6.1}$$

dengan μdt merupakan komponen deterministik, $\sigma dW(t)$ merupakan komponen stokastik, dan $W(t)$ merupakan gerak Brown baku, dengan $W(t) = \sqrt{T}Z$ dimana $Z \sim N(0,1)$. Persamaan (6.1) disebut juga dengan gerak Brown geometri untuk harga saham.

6.2. *Penentuan harga Saham Pada Saat Jatuh Tempo*

Sebelum para investor melakukan investasi, para investor akan mencari informasi untuk mengetahui tentang perubahan harga saham saat ini dan perubahan-perubahan harga saham pada selang waktu tertentu. Oleh karena itu, diperlukan model harga saham dalam batas waktu tertentu. Menurut Higham [4], model *discrete-time* dapat dituliskan sebagai berikut. Misalkan untuk selang waktu $0 < t < T$, waktu tersebut dipartisi sebesar Δt sebanyak L partisi dan misalkan $t_i = i\Delta t$ dan $T = L\Delta$, maka model harga saham diskrit dapat ditentukan pada titik t_i. Sehingga dapat ditulis persamaan

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)(1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Y_i), \tag{6.2}$$

dimana μ adalah parameter konstan. Parameter μ sama perannya dengan tingkat suku bunga r, $\sigma \geqslant 0$ adalah parameter konstan yang menentukan kekuatan fluktuasi acak, $Y_i \sim N(0,1)$.

Misalkan harga saham pada $t = 0$ adalah $S(0)$ dan $S(0) = S_0$. Berdasarkan persamaan (6.2) dapat dinyatakan $S(\Delta t),\ S(2\Delta t),\ \cdots,\ S(L\Delta t = T)$. Untuk $\Delta t \to 0$, $L \to \infty$, akan diperoleh ekspresi limit untuk $S(T)$. Berdasarkan model diskrit (6.2) dapat diperoleh persamaan berikut

$$S(T) = S_0 \prod_{i=0}^{L-1} \left(1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Y_i\right)$$

Kenakan ln pada kedua ruas, akibatnya

$$\ln\left(\frac{S(T)}{S_0}\right) = \sum_{i=0}^{L-1} \ln(1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Y_i)$$

Dengan menggunakan deret Taylor maka dapat dilakukan pendekatan dengan $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \dfrac{\varepsilon^2}{2}$, untuk ε yang sangat kecil. Sehingga dengan pendekatan ln, akan diperoleh

$$\ln\left(\frac{S(T)}{S_0}\right) = \sum_{i=0}^{L-1} (\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Y_i - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t Y_i^2) \tag{6.3}$$

dengan $E\left(\ln\frac{S(t)}{S(0)}\right) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t$ dan $Var\left(\ln\frac{S(t)}{S(0)}\right) \approx \sigma^2\Delta t$

Karena *mean* μ dan variansi σ^2 konstan, berdasarkan teorema limit pusat dapat dinyatakan bahwa $\ln\left(\frac{S(T)}{S_0}\right)$ pada persamaan (6.3) akan mengikuti peubah acak yang berdistribusi normal dengan *mean* $L(\mu\Delta t - \frac{\sigma^2}{2}\Delta t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ dan variansi $L\sigma^2\Delta t = \sigma^2 T$ atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \backsim N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma T). \tag{6.4}$$

Akibatnya harga saham untuk waktu jatuh tempo T dapat dituliskan sebagai berikut

$$S(T) = S_0\exp(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z, \qquad \text{dimana } Z \sim N(0,1). \tag{6.5}$$

6.3. *Penentuan Nilai Drift dan Nilai Volatilitas dengan Metode Maximum Likelihood Estimation*

Metode maksimum likelihood merupakan salah satu cara mengestimasi parameter yang tidak diketahui. Prosedur estimasi maksimum likelihood digunakan untuk menguji apakah estimasi maksimum yang tidak diketahui dari fungsi likelihood adalah suatu contoh yang nilainya sudah memaksimumkan fungsi likelihood tersebut. Berdasarkan definisi sebaran normal, maka diperoleh bentuk fungsi *likelihood* dari contoh acak $X_1, \ldots, X_n$ yang menyebar secara normal, yaitu:

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2). \tag{6.6}$$

Misalkan $l(\mu, \sigma^2)$ adalah nilai logaritma dari fungsi *likelihood*, maka

$$\ln(L(\mu, \sigma^2)) = \ln(\mu, \sigma^2) = \left(-\frac{n}{2}\ln(2\Pi\sigma^2)\right) - \left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \mu)^2\right).$$

Nilai optimal dari μ harus memenuhi kondisi $\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = 0$ dan nilai optimal σ^2 harus memenuhi kondisi $\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0$. Nilai optimal μ dan σ^2 dioeroleh dalam bentuk

$$\mu_{MLE} = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i)}{n}, \qquad \sigma^2_{MLE} = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i - \mu_{MLE})^2}{n}. \tag{6.7}$$

Berdasarkan nilai logaritma dari fungsi *likelihood* di atas dapat dibentuk matrik Hessian sebagai berikut

$$H_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial \partial^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial (\sigma^2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\sigma^2_{MLE}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\sigma^2_{MLE})^2}(\frac{n}{2} - \frac{1}{\sigma^2_{MLE}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_{MLE})^2) \end{bmatrix}.$$

Menurut Perresini [6] jika $-\frac{n}{\sigma^2_{MLE}} < 0$ dan $\det(H_l) < 0$, maka dapat dikatakan H_l definit negatif. Sehingga dapat dikatakan bahwa μ_{MLE} dan σ^2_{MLE} memaksimumkan fungsi *likelihood* $L(\mu, \sigma^2)$.

Berdasarkan persamaan (6.4) diketahui bahwa $\ln(\frac{S(t)}{S(t-1)})$ berdistribusi normal dengan *drift* $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ dan variansi $\sigma^2 T$, maka untuk memenuhi persamaan (6.7) dimisalkan bahwa peubah acak $X_t = \ln(\frac{S(t)}{S(t-1)})$ dimana $t = 1, 2, \ldots$. *Drift* dan volatilitas pada persamaan (6.7) dapat digunakan untuk menentukan harga saham pada waktu jatuh tempo.

6.4. *Penentuan Harga Opsi Eropa*

Jika disubtitusikan persamaan (6.7) ke persamaan (6.5) maka akan diperoleh harga saham pada waktu jatuh tempo T sebagai berikut

$$S(T) = S_0 \exp(\mu_{MLE} - \frac{1}{2}\sigma^2_{MLE})T + \sigma_{MLE}\sqrt{T}Z, \quad Z \sim N(0,1) \tag{6.8}$$

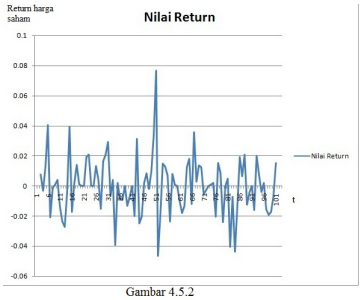
dengan $S(T)$adalah harga saham pada waktu T, $S(0)$ adalah harga saham pada waktu T awal, μ adalah nilai ekspektasi dari return, σ adalah nilai volatility dari *return*, T adalah waktu jatuh tempo Z adalah berdistribusi normal baku

Selanjutnya, gunakan faktor terdiskon dan persamaan (2.1) untuk menentukan nilai *present value* dari fungsi *payoff*, sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk

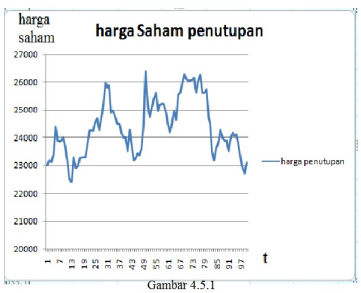
$$V_0 = \exp(-rt)\max\{d(K - S(T)), 0\} \text{ dengan } d = \begin{cases} -1, & \text{untuk opsi call ,} \\ 1, & \text{untuk opsi put .} \end{cases} \tag{6.9}$$

Persamaan (6.9) ini merupakan harga opsi Eropa pada waktu $t = 0$ yaitu harga opsi pada saat dilakukan pembelian opsi.

6.5. *Prediksi Harga Opsi Eropa Pada Harga Saham Penutupan di PT. Astra Agro Lestari Tbk.*



Gambar 4.5.2



Gambar 4.5.1

Prediksi harga opsi Eropa ini dilakukan dengan mengambil data harga saham penutupan di PT. Astra Agro Lestari Tbk. dari 1 Desember 2014 sampai 17 April

2015. Data ditunjukkan oleh Gambar 4.5.1. *Return* dari harga saham penutupan di PT. Astra Agro Lestari Tbk. ditunjukan pada Gambar 4.5.2 yang merupakan selisih dari nilai logaritma harga saham saat t dengan harga saham saat $t-1$. Untuk menetukan prediksi harga opsi Eropa dengan mengunakan fungsi *payoff* diperlukan unsur-unsur berikut:

(1) Harga saham awal yaitu $S_0 = Rp.23.025,-$.
(2) Harga kesepakatan K dimisalkan dengan tiga kemungkinan, yaitu $K < S(T),\ K = S(T),\ K > S(T)$. maka diambil nilai K dengan nilai Rp. 22.400,-, Rp. 24.381,-, dan Rp. 26.400,-.
(3) Waktu jatuh tempo opsi adalah 17 April 2015. Dengan kata lain $T = \dfrac{100}{252}$ tahun
(4) Tingkat suku bunga r yang digunakan adalah suku bunga acuan yang dikeluarkan oleh Bank Indonesia atau yang lebih dikenal dengan *BI rate*, sebesar $7,5$ persen per tahunnya.
(5) Nilai ekpektasi diperoleh dari persamaan (6.7), yaitu $\mu_{MLE} = 3,2848 \times 10^{-5}$.
(6) Nilai *volatility* diperoleh dari persamaan (6.7) yaitu $\sigma_{MLE} = 0,01878$.

No	Nilai kesepakatan (K)	harga opsi *call*	harga opsi *Put*
1	Rp. 22.400,-	Rp. 733,-	Rp. 0,-
2	Rp. 24.381,-	Rp. 0,-	Rp. 1.191,-
3	Rp. 26.400,-	Rp. 0,-	Rp. 3150,-

Tabel 1. Harga opsi *call* dan harga opsi *put*

Tabel (1) menunjukkan harga opsi Eropa dari data harga saham penutupan harian di PT. Astra Agro Lestari Tbk. Untuk opsi *call* disimpulkan bahwa pada saat harga kesepakatan lebih kecil dari harga saham sebaiknya investor melakukan investasi dan sebaliknya untuk opsi *put*, sebaiknya investor tidak menjual sahamnya karena tidak akan mendapatkan keuntungan.

7. Penutup

Harga opsi Eropa dapat ditentukan dengan menghitung *present value* dari fungsi *payoff* yaitu

$$V_0 = \exp(-rt)\max\{d(K - S(T)), 0\} \text{ dengan } d = \begin{cases} -1, & \text{untuk opsi call ,} \\ 1, & \text{untuk opsi put ,} \end{cases}$$

$$S(T) = S_0 \exp(\mu_{MLE} - \frac{1}{2}\sigma^2_{MLE})T + \sigma_{MLE}\sqrt{T}Z$$

dan

$$\mu_{MLE} = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i)}{n} \quad \text{dan} \quad \sigma^2_{MLE} = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i - \mu_{MLE})^2}{n}.$$

Berdasarkan simulasi yang dilakukan pada PT. Astra Agro Lestari Tbk. dapat disimpulkan bahwa jika perusahaan ini dengan perusahan lain melakukan investasi baik berperan sebagai pemilik opsi maupun sebagai penerbit opsi maka perusahaan ini dapat menentukan harga opsi sehingga tidak akan mengalami kerugian saat melakukan investasi.

8. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Riri Lestari, M.Si, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Dr. Dodi Devianto, Ibu Dr. Yanita, Ibu Dr. Maiyastri dan Ibu Ferra Yanuar yang telah memberikan masukan dan saran sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Closing price. 2015. *http* : $//finance.yahoo.com/q/hp?s = AALI.JK + Historical + Prices$. [diakses pada 15 Maret 2015].
[2] Halim, A. 2005. *Analisis Investasi*. Salemba Empat, Jakarta.
[3] Harinaldi. 2005. *Prinsip-Prinsip Statistik untuk Teknik dan Sains*. Erlangga, Jakarta.
[4] Higam, Desmond J.2004 *An Introduction to financial Option Valuation*. Cambridge university Press, New York.
[5] Hsu,Hwe P. 1996. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability, Random Variabel and Random Processes*. Mc Graw Hill, New York.
[6] Peressini, Anthony L., Sullivan F. E. and Ulh J.J. 1988. *The Mathematics Of Nonlinear Programming*. Springer-verlaq, New York.
[7] Ross, Sheldon. 1982. *Stochastic Processes*. John Wiley and Son, New York.
[8] Ross, Sheldon. 1999. *An Introduction to Mathematical Finance Option and Other Topics*. Cambridge University, California.
[9] Walpole, R.E. 1993. *Pengantar Statistika. Edisi ke-3*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.