Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **3** Hal. 25 – 30
ISSN : 2303–2910

DIMENSI METRIK DARI GRAF NAGA $T_{n,m}$

DEBBY MARINDA, SYAFRUDDIN
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : Debbymarinda@yahoo.com

Abstrak. Misalkan W suatu sub himpunan dari G dengan $|V(G)| = n$. Himpunan W dikatakan sebagai *resolving set* di G jika vektor-vektor representasi dari $r(v_i|W)$ berbeda untuk setiap $v_i \in V(G)$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. *Resolving set* dengan kardinalitas minimum disebut dengan *resolving set* minimum atau disebut juga dengan basis dan kardinalitasnya disebut sebagai dimensi metrik yang dinotasikan dengan $\dim(G)$. Representasi dari titik v terhadap W dinotasikan dengan $r(v_i|W)$ dan dapat ditulis sebagai $r(v|W) = (d(v_i, w_1), d(v_i, w_2), \cdots, d(v_i, w_k))$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ dan $1 \leq k \leq i$. Misal terdapat graf siklus Cn dimana $n \geq 3$ dan graf lintasan P_{m+1}, $m \geq 2$ dengan titik $V(C_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dan $V(P_{m+1}) = \{u_0, u_1, \cdots, u_m\}$. Tulisan ini merupakan studi literatur dari makalah [1], yang membahas tentang penentuan dimensi metrik dari graf naga $T_{n,m}$, dimana diperoleh bahwa $\dim(T_{n,m}) = 2$.

Kata Kunci: Dimensi Metrik, Resolving set, Graf Naga

1. Pendahuluan

Pada teori graf terdapat istilah dimensi metrik yang diperkenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 melalui *paper* mereka yang berjudul *On the metric dimension of a graph.* Pada *paper* tersebut juga diperkenalkan tentang representasi metrik, yang merupakan cara untuk merepresentasikan lokasi titik pada suatu graf terhadap subhimpunan yang dipilih. Representasi dari suatu titik dapat dianggap sebagai vektor atau koordinat yang menunjukkan lokasi titik tersebut relatif terhadap subhimpunan yang dipilih.

Misalkan G suatu graf terhubung. Jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada graf G. Misalkan W suatu sub himpunan dari G dengan $|V(G)| = n$. Himpunan W dikatakan sebagai *resolving set* di G jika vektor-vektor representasi dari $r(v_i|W)$ berbeda untuk setiap $v_i \in V(G)$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. *Resolving set* dengan kardinalitas minimum disebut dengan *resolving set* minimum atau disebut juga dengan basis dan kardinalitasnya disebut sebagai dimensi metrik yang dinotasikan dengan $\dim(G)$. Representasi dari titik v terhadap W dinotasikan dengan $r(v_i|W)$ dan dapat ditulis sebagai $r(v|W) = (d(v_i, w_1), d(v_i, w_2), \cdots, d(v_i, w_k))$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ dan $1 \leq k \leq i$.

2. Dimensi Metrik

Graf $G = (V, E)$ adalah pasangan himpunan terurut, dimana V adalah himpunan berhingga tak kosong yang elemennya disebut sebagai titik dan E adalah himpunan pasangan sisi yang menghubungkan sepasang titik.

Jika terdapat sisi $e = uv \in E(G)$, maka titik u disebut **bertetangga** dengan titik v dan demikian sebaliknya. Dalam hal ini, sisi e dikatakan **terkait** dengan titik u dan v. Banyak titik yang ada pada graf G, dinotasikan dengan $|V(G)|$, disebut **orde** (*order*) dari G dan banyaknya sisi di G, dinotasikan dengan $|E(G)|$, disebut **ukuran** (*size*) dari G.

Graf G dikatakan **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v. Sebaliknya, jika terdapat dua titik yang tidak dihubungkan oleh lintasan, maka G adalah **graf tidak terhubung** (*disconnected graph*). **Diameter** dari suatu graf dinotasikan dengan d, adalah jarak maksimum antara dua titik di G yaitu $diam(G) = max\{d(u, v)|u, v \in V(G)\}$. **Graf lengkap** (***complete graph***) adalah suatu graf yang setiap titiknya saling bertetangga. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n.

Suatu jalan *(walk)*di G adalah suatu barisan berhingga *(tak kosong)* $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \cdots e_kv_k$ yang suku-sukunya bergantian antara titik dan sisi. Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W. Sedangkan titik-titik $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal dari W ,dan k disebut panjang dari W. Jika semua sisi $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut sebuah jejak *(trail)*. Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \cdots, v_k$ dalam jalan W juga berbeda, maka W disebut sebuah **lintasan***(path)*. Graf lintasan ialah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n.

Siklus (*Cycle*) adalah suatu lintasan dimana titik awalnya sama dengan titik akhir. Siklus dengan panjang n dilambangkan dengan $C_n.n \geq 3$. Graf siklus ialah graf yang terdiri dari satu siklus. Pada graf siklus jumlah titiknya minimal 3.

Misal terdapat graf siklus Cn dimana $n \geq 3$ dan graf lintasan P_{m+1}, $m \geq 2$ dengan titik $V(Cn) = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ dan $V(Pm) = \{u_0, u_1, \cdots, u_{m+1}\}$. Graf naga $T_{n,m}$ adalah graf yang diperoleh dengan cara mengidentifikasi titik v_n di C_n dengan titik u_0 di P_{m+1}. Dapat dilihat bahwa $|V(T_{n,m})| = n+m$ dan $|E(T_{n,m})| = n+m-1$.

Teorema 2.1 (Chartrand, dkk., 2000). *Misalkan G adalah graf terhubung dengan banyak titik $n \geq 2$ dan diameter d maka $f(n, d) \leq dim(G) \leq n - d$ dengan $f(n, d)$ adalah bilangan bulat tak negatif terkecil k yang memenuhi hubungan $d^k \geq n - k$.*

Pada Teorema berikut akan dibuktikan bahwa satu-satunya graf dengan dimensi metrik 1 adalah graf lintasan P_n.

Teorema 2.2 (Chartrand, dkk, 2000). *Misalkan G adalah graf terhubung dengan banyak titiknya n, maka $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G \simeq P_n$.*

Bukti. Misalkan $G \simeq P_n$, akan dibuktikan bahwa $dim(G) = 1$. Karena jarak maksimal antara sebarang dua titik di G sebanyak n titik maka $diam(G) = n - 1$, berdasarkan Teorema 2.1, batas bawah untuk $dim(G)$ adalah bilangan bulat positif k terkecil yang memenuhi $(n - 1)^k \geq n - k$. Jelas bahwa bilangan yang dimaksud adalah $k = 1$. Dengan demikian

$$1 \leq \dim(G), \tag{2.1}$$

dan juga menurut Teorema 2.1,

$$\dim(G) \leq n - (n-1) = 1. \tag{2.2}$$

Dari (2.1) dan (2.2) dapat disimpulkan bahwa $\dim(G) = 1$.

Sebaliknya, misalkan $\dim(G) = 1$. Akan dibuktikan $G \cong P_n$. Karena $\dim(G) = 1$ maka terdapat *basis* $W = \{w\}$. Untuk setiap v di G, $r(v|W) = d(v,w)$ adalah bilangan bulat positif kurang dari n. Karena W *basis* maka untuk setiap $v_i \in G, 1 \leq i \leq n$ berlaku $0 \leq r(v_i|W) = d(v_i, w) < n$ dan terdapat sebanyak n buah representasi yang berbeda satu sama lain. Haruslah seluruh representasi berbentuk

$$(0), (1), (2), \cdots, (n-1).$$

Sehingga dapat dilihat bahwa diameter dari graf G adalah $n-1$, maka $G \simeq P_n$. □

3. Pembahasan

Misal terdapat graf siklus Cn ,$n \geq 3$ dengan $V(Cn) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dan graf lintasan P_{m+1}, $m \geq 2$ dengan $V(P_{m+1}) = \{u_0, u_1, \cdots, u_m\}$. $T_{n,m}$ adalah graf naga yang berasal dari graf siklus Cn, $n \geq 3$ dan graf lintasan P_{m+1} ,$m \geq 2$ dengan cara mengidentifikasikan titik v_n di C_n ke titik v_0 di P_{m+1}. Pada makalah ini akan dikaji kembali paper [1] tentang dimensi metrik dari graf naga $T_{n,m}$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 2$ yaitu $\dim(T_{n,m}) = 2$. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Teorema 3.1 berikut:

Teorema 3.1. [1] *Untuk setiap $n \geq 3, m \geq 2$ dimensi metrik dari graf naga $T_{n,m}$ adalah* $\dim(T_{n,m}) = 2$.

Bukti. Dari Teorema 2.1 didapat $\dim(T_{n,m}) \geq 2$. Untuk selanjutnya, akan ditunjukan bahwa $dim(T_{n,m}) \leq 2$. Oleh karena itu perlu ditunjukkan bahwa terdapat *resolving set* dari W dengan kardinalitas 2, sedemikian sehingga representasi setiap titik di $T_{n,m}$ berbeda terhadap W tersebut.

Secara umum, pandang dua kasus, yaitu untuk n bilangan genap positif dan n bilangan ganjil positif.

Kasus 1. Untuk n bilangan genap positif, tulis $n = 2k$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Pilih $W = \{v_k, v_{k+1}\}$ sebagai *resolving set* untuk graf $T_{n,m}$. Maka representasi semua titik dari $V(G) \setminus W$ adalah sebagai berikut:

$$r(v_i|W) = \begin{cases} (k-i, k-i+1), & \text{untuk } 1 \leq i \leq k-1, \\ (i-k, i-k-1), & \text{untuk } k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$
$$r(u_j|W) = (k+j, k+j-1), \text{ untuk } 1 \leq j \leq m.$$

Representasi titik-titik di C_n adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
r(v_1 \mid W) &= (k-1, k-i-1) = (k-1, k) \\
r(v_2 \mid W) &= (k-2, k-2+1) = (k-2, k-1) \\
&\vdots \\
r(v_{k-1} \mid W) &= (k-(k-1), k-(k-1)+1) = (1, 2) \\
r(v_{k+1} \mid W) &= (k+1-k), (k+1)-k-1) = (1, 0) \\
&\vdots \\
r(v_n \mid W) &= (n-k, n-k-1).
\end{aligned}$$

Sementara representasi titik-titik di P_{m+1} adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r(u_1 \mid W) &= (k+1, k+1-1) = (k+1, k) \\
r(u_2 \mid W) &= (k+2, k+2-1) = (k+2, k+1) \\
&\vdots \\
r(u_m \mid W) &= (k+m, k+m-1).
\end{aligned}$$

Kasus 2. Untuk $n = 2k+1$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Pilih $W = \{v_1, v_{n-1}\}$ adalah *resolving set* untuk graf $T_{n,m}$. Representasi semua titik dari $V(G)\backslash W$ adalah sebagai berikut:

$$r(v_i|W) = \begin{cases} (i-1, i+1), & \text{untuk } 2 \le i \le k-1, \\ (i-1, n-i-1), & \text{untuk } k \le i \le k+1, \\ (n-i+1, n-i-1), & \text{untuk } k+2 \le i \le n-2, \end{cases}$$
$$r(v_n|W) = (1, 1)$$
$$r(u_j|W) = (j+1, j+1), \text{ untuk } 1 \le j \le m.$$

Representasi titik-titik di C_n adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
r(v_2 \mid W) &= (i-1, i+1) = (2-1, 2+1) = (1, 3) \\
r(v_{k-1} \mid W) &= ((k-1)-1, (k-1)+1) \\
r(v_k \mid W) &= (k-1, n-k-1) \\
r(v_{k+1} \mid W) &= ((k+1)-1), n-(k+1)-1) \\
r(v_{k+2} \mid W) &= (n-(k+2)+1, n-(k+2)-1) \\
r(v_{n-2} \mid W) &= (n-(n-2)+1, n-(n-2)-1) \\
r(v_n \mid W) &= (1, 1).
\end{aligned}$$

Sementara representasi titik-titik di P_{m+1} adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r(u_1 \mid W) &= (1+1, 1+1) = (2, 2) \\
r(u_2 \mid W) &= (2+1, 2+1) = (3, 3) \\
&\vdots \\
r(u_m \mid W) &= (m+1, m+1).
\end{aligned}$$

Dari **Kasus 1** dan **Kasus 2** diperoleh bahwa $\dim(T_{n,m}) \le 2$. Jadi $\dim(T_{n,m}) = 2$. $\square$

Contoh 3.2. Akan ditentukan dimensi metrik dari graf $T_{6,5}$ dengan resolving set $W = \{v_3, v_4\}$. Berdasarkan Teorema 2.1 diperoleh representasi setiap titik di $T_{6,5}$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
r(v_1 \mid W) &= (d(v_1, v_3), d(v_1, v_4)) = (2, 3)\\
r(v_2 \mid W) &= (d(v_2, v_3), d(v_2, v_4)) = (1, 2)\\
r(v_3 \mid W) &= (d(v_3, v_3), d(v_3, v_4)) = (0, 1)\\
r(v_4 \mid W) &= (d(v_4, v_3), d(v_4, v_4)) = (1, 0)\\
r(v_5 \mid W) &= (d(v_5, v_3), d(v_5, v_4)) = (2, 1)\\
r(v_6 \mid W) &= (d(v_6, v_3), d(v_6, v_4)) = (3, 2)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
r(u_1 \mid W) &= (d(u_1, v_3), d(u_1, v_4)) = (4, 3)\\
r(u_2 \mid W) &= (d(u_2, v_3), d(u_2, v_4)) = (5, 4)\\
r(u_3 \mid W) &= (d(u_3, v_3), d(u_3, v_4)) = (6, 5)\\
r(u_4 \mid W) &= (d(u_4, v_3), d(u_4, v_4)) = (7, 6)\\
r(u_5 \mid W) &= (d(u_5, v_3), d(u_5, v_4)) = (8, 7)
\end{aligned}
$$

Dapat dilihat bahwa representasi setiap titik di $T_{6,5}$ berbeda satu sama lain.

Contoh 3.3. Akan ditentukan dimensi metrik dari graf $T_{7,5}$ dengan resolving set $W = \{v_1, v_6\}$. Berdasarkan Teorema 2.1 dapat diperoleh representasi setiap titik di $T_{7,5}$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
r(v_1 \mid W) &= (d(v_1, v_1), d(v_1, v_6)) = (0, 2)\\
r(v_2 \mid W) &= (d(v_2, v_1), d(v_2, v_6)) = (1, 3)\\
r(v_3 \mid W) &= (d(v_3, v_1), d(v_3, v_6)) = (2, 3)\\
r(v_4 \mid W) &= (d(v_4, v_1), d(v_4, v_6)) = (3, 2)\\
r(v_5 \mid W) &= (d(v_5, v_1), d(v_5, v_6)) = (3, 1)\\
r(v_6 \mid W) &= (d(v_6, v_1), d(v_6, v_6)) = (2, 0)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
r(u_1 \mid W) &= (d(u_1, v_1), d(u_1, v_6)) = (2, 2)\\
r(u_2 \mid W) &= (d(u_2, v_1), d(u_2, v_6)) = (3, 3)\\
r(u_3 \mid W) &= (d(u_3, v_1), d(u_3, v_6)) = (4, 4)\\
r(u_4 \mid W) &= (d(u_4, v_1), d(u_4, v_6)) = (5, 5)\\
r(u_5 \mid W) &= (d(u_5, v_1), d(u_5, v_6)) = (6, 6).
\end{aligned}
$$

Dapat dilihat bahwa representasi setiap titik di $T_{7,5}$ berbeda satu sama lain.

4. Kesimpulan

Misal terdapat graf siklus C_n dimana $n \geq 3$ dan graf lintasan P_m $m \geq 2$ dengan himpunan titik

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \text{ dan } V(P_m) = \{u_0, u_1, \cdots, u_{m+1}\}.$$

Graf naga $T_{n,m}$ adalah graf yang diperoleh dengan cara mengidentifikasi titik v_n di C_n dengan titik u_0 di P_{m+1}. Dalam paper ini telah dikaji kembali tentang penentuan dimensi metrik dari graf $T_{n,m}$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 2$, seperti yang telah dibahas dalam [1] yaitu $dim(T_{n,m}) = 2$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Budi Rudianto, M.Si dan Bapak Zulakmal, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] A. Murtaza, A. Gohar, A. Usman, Rahim M.T. 2012. On Cycle Related Graphs with Constant Metric Dimension. *Journal of Discrete Mathematics.* **2** : 21 – 23.
[2] Budayasa, Ketut. 2007. Teori Graf dan Aplikasinya. Surabaya : Unesa University Press Surabaya.
[3] Chartrand, G., Eroh, L., Jhonson, M., dan Oellerman, O.R. 2000. Resolvability in graph and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics.* **105** : 99 – 107.
[4] Eka Septiana, dan Rahardjeng Budi, S.Si, M.Si. 2014. Dimensi Metrik Pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit. *Jurnal MATHunesa.* **3** : 1 – 6.