

PENYARINGAN TERURUT *ABSORBENT FUZZY* DARI SEMIGRUP IMPLIKATIF

EKI AIDIO SUKMA, NOVA NOLIZA BAKAR

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : ekiaidiosukm4@gmail.com*

Abstrak. Makalah ini membahas sebagian dari tulisan Jun, Park dan Williams [8] yaitu tentang subhimpunan dari semigrup implikatif yang disebut penyaringan terurut *absorbent* fuzzy serta beberapa sifatnya. Suatu himpunan fuzzy B dari himpunan tak kosong X di tandai dengan suatu fungsi keanggotaan A_B yang mengaitkan setiap titik pada X ke bilangan riil dalam interval $[0, 1]$. Beberapa jenis semigrup implikatif fuzzy adalah penyaringan terurut fuzzy, penyaringan terurut implikatif fuzzy, dan penyaringan terurut *absorbent* fuzzy. Setiap penyaringan terurut *absorbent* fuzzy merupakan penyaringan terurut fuzzy dan penyaringan terurut implikatif fuzzy.

Kata Kunci: Semigrup Implikatif, Penyaringan Terurut Implikatif Positif (*Fuzzy*), Penyaringan Terurut *Absorbent Fuzzy*

1. Pendahuluan

Semilattice implikatif merupakan struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan tiga operasi, yaitu operasi terurut parsial, konjungsi dan implikasi.

Chan dan Shum [3] telah memperkenalkan sebelumnya tentang pengertian semigrup implikatif dan penyaringan terurut. Nemitz [11] dan Blyth [2] juga telah membahas tentang *semilattice* implikatif, secara umum yang terkait erat dengan implikasi logika matematika dan teori himpunan beda (Birkhoff [1] dan Curry [5]). Kemudian Nemitz menunjukkan bahwa penyaringan terurut memainkan peranan yang penting dalam perkembangan teori *semilattice* implikatif. Berdasarkan hal tersebut, Chan dan Shum [3] menetapkan beberapa sifat dasar dan membentuk struktur penyaringan terurut dari semigrup implikatif tersebut.

Jun dkk [10] membahas tentang semigrup implikatif dan membangun teori yang lebih lengkap dari penyaringan terurut, kemudian Jun [7] juga menyelidiki sifat-sifat lain dari semigrup implikatif dan penyaringan terurutnya. Selanjutnya Y. B. Jun, C. H. Park dan D. R. P. Williams [8] memperkenalkan suatu subhimpunan dari semigrup implikatif yang disebut penyaringan terurut *absorbent* serta mengkaji beberapa sifat-sifatnya.

Definisi 1.1. [9] *Semigrup terurut parsial secara negatif dinotasikan dengan, (S, \preceq, \bullet) , adalah suatu himpunan yang terdefinisi terurut parsial " \preceq " dan terdapat suatu operasi biner " \bullet " pada S sedemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in S$ berlaku :*

- (1) $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$,
- (2) Jika $x \preceq y$ maka $x \bullet z \preceq y \bullet z$ dan $z \bullet x \preceq z \bullet y$,
- (3) $x \bullet y \preceq x$ dan $x \bullet y \preceq y$.

Proposisi 1.2. [3] Misalkan S suatu semigrup implikatif maka untuk setiap $x, y, z \in S$, berlaku:

- (1) $x \preceq 1$, dimana $x * x = 1, x = 1 * x$,
- (2) $x \preceq y * (x \bullet y)$,
- (3) $x \preceq x * (x \bullet x)$,
- (4) $x \preceq y * x$,
- (5) Jika $x \preceq y$ maka $x * z \succeq y * z$ dan $z * x \preceq z * y$,
- (6) $x \preceq y$ jika dan hanya jika $x * y = 1$,
- (7) $x * (y * z) = (x \bullet y) * z$,
- (8) Jika (A, \bullet) merupakan komutatif maka $x * y \preceq (a \bullet x) * (a \bullet y)$ untuk setiap $a \in A$.

Proposisi 1.3. [9] Jika S suatu semigrup implikatif komutatif, maka untuk setiap $x, y, z \in S$, berlaku:

- (1) $x * (y * z) = y * (x * z)$,
- (2) $x \preceq (x * y) * y$,
- (3) $y * z \preceq (z * x) * (y * x)$,
- (4) $y * z \preceq (x * y) * (x * z)$,
- (5) $((x * y) * y) * y = x * y$.

2. Fuzzy

Definisi 2.1. [13] Suatu himpunan fuzzy B dari himpunan tak kosong X di tandai dengan suatu fungsi keanggotaan A_B yang mengaitkan setiap titik pada X ke bilangan riil dalam interval $[0, 1]$. Dengan nilai $A_B(x)$ pada x mewakili "angka dari keanggotaan" dari x pada B .

Definisi 2.2. [14] Misalkan S semigrup implikatif dan A himpunan fuzzy pada S . Himpunan A disebut penyaringan terurut fuzzy dari A jika memenuhi kondisi berikut :

- (c1) $A(x) \leq A(1), \forall x \in S$.
- (c2) $A(x) \geq \min A(z * x), A(z), \forall x, z \in S$.

Catatan. Setiap fuzzy penyaringan terurut adalah ketetapan urutan ($x = y \Leftrightarrow A(x) = A(y)$).

Definisi 2.3. [14] Misalkan S adalah semigrup implikatif dan A himpunan fuzzy di S dikatakan penyaringan terurut implikatif fuzzy dari S jika memenuhi kondisi berikut :

- (c1) $A(x) \leq A(1), \forall x \in S$.
- (c3) $A(x * z) \geq \min\{A(x * (y * z)), A(x * y)\}, \forall x, y, z \in S$.

Definisi 2.4. [14] Misalkan S adalah semigrup implikatif dan A himpunan fuzzy di S dikatakan penyaringan terurut implikatif positif fuzzy dari S jika memenuhi kondisi berikut :

- (c1) $A(x) \leq A(1), \forall x \in S$.
(c4) $A(y) \geq \min\{A(x * ((y * z) * y), A(x))\}, \forall x, y, z \in S$.

Lema 2.5. [14] Misalkan A adalah himpunan fuzzy pada semigrup implikatif komutatif S . Himpunan A adalah penyaringan terurut fuzzy dari S jika $x \bullet y \preceq z$ maka $A(z) \geq \min\{A(x), A(y)\}$.

Teorema 2.6. [14] Misalkan S adalah semigrup implikatif komutatif. Setiap penyaringan terurut implikatif positif fuzzy dari S adalah penyaringan terurut implikatif fuzzy.

Bukti. Misalkan A penyaringan terurut implikatif positif fuzzy dari S dan $x, y, z \in S$, maka berlaku (c1) dan (c4). Akan ditunjukkan bahwa A penyaringan terurut implikatif fuzzy, yaitu dengan menunjukkan (c3) berlaku. Dengan Proposisi 1.3(1) dan Proposisi 1.3(4) diperoleh

$$x * (y * z) = y * (x * z) \preceq (x * y) * (x * (x * z)).$$

Dengan menggunakan definisi semigrup implikatif diperoleh

$$\begin{aligned} x * (y * z) \bullet (x * y) &\preceq x * (x * z) && \text{(Lemma 2.5)} \\ \min\{A(x * (y * z)), A(x * y)\} &\leq A(x * (x * z)) && \text{(Proposisi 1.3(5))} \\ &= A(x * ((x * z) * z)) && \text{(Proposisi 1.3(1))} \\ &= A(((x * z) * z) * (x * z)) && \text{(Proposisi 1.2(1))} \\ &= A(1 * (((x * z) * z) * (x * z))) && \text{(Proposisi 1.2(1))} \\ &= \min\{A(1 * (((x * z) * z) * (x * z))), A(1)\} && \text{(c1)} \\ &\leq A(x * z) && \text{(c4).} \end{aligned}$$

Karena $A(x * z) \geq \min\{A(x * (y * z)), A(x * y)\}, \forall x, y, z \in S$ maka terbukti bahwa A merupakan penyaringan terurut implikatif fuzzy. \square

3. Penyaringan Terurut Absorbent Fuzzy dari Semigrup Implikatif

Dalam bagian ini akan dijelaskan penyaringan terurut absorbent fuzzy dari semigrup implikatif.

Definisi 3.1. [8] Misalkan S adalah semigrup implikatif. Himpunan A pada S dikatakan penyaringan terurut absorbent fuzzy dari S jika memenuhi (c1) dan

- (c5) $A(((x * y) * y) * x) \geq \min\{A(z * (y * x)), A(z)\}, \forall x, y, z \in S$.

Teorema 3.2. [8] Setiap penyaringan terurut absorbent fuzzy adalah penyaringan terurut fuzzy.

Bukti. Misal A adalah penyaringan terurut absorbent fuzzy dari S dan $x, y, z \in S$, maka berlaku (c1) dan (c5). Akan dibuktikan bahwa A adalah penyaringan terurut fuzzy yaitu dengan menunjukkan $A(x) \geq \min\{A(z * x), A(z)\}, \forall x, z \in S$.
Pilih $y = 1$ maka dari (c5) diperoleh

$$\begin{aligned}
A(((x * y) * y) * x) &\geq \min\{A(z * (y * x)), A(z)\} \\
A(((x * 1) * 1) * x) &\geq \min\{A(z * (1 * x)), A(z)\} \\
A(((x * 1) * 1) * x) &\geq \min\{A(z * (x)), A(z)\} && \text{(Proposisi 1.2 (1))} \\
A(((1) * 1) * x) &\geq \min\{A(z * (x)), A(z)\} && \text{(Proposisi 1.2 (6))} \\
A((1 * 1) * x) &\geq \min\{A(z * x), A(z)\} \\
A((1) * x) &\geq \min\{A(z * x), A(z)\} && \text{(Proposisi 1.2 (1))} \\
A(x) &\geq \min\{A(z * x), A(z)\}
\end{aligned}$$

Karena $A(x) \geq \min\{A(z * x), A(z)\}$, $\forall x, z \in S$, maka A adalah penyinggiran terurut fuzzy. \square

Teorema berikut ini adalah teorema utama dalam tulisan ini, yang menjelaskan tentang syarat perlu dan syarat cukup suatu himpunan merupakan penyinggiran terurut *absorbent* fuzzy dari semigrup implikatif.

Teorema 3.3. [8] *Misal A suatu penyinggiran terurut fuzzy dari S . Maka yang berikut ekuivalen*

- (1) A adalah suatu penyinggiran terurut absorbent fuzzy dari S .
- (2) $A(y * x) \leq A(((x * y) * y) * x)$, $\forall x, y \in S$.

Bukti. (\Rightarrow) Asumsikan bahwa (1) adalah benar, sehingga berlaku $A(((x * y) * y) * x) \geq \min\{A(z * (y * x)), A(z)\} \forall x, y, z \in S$, maka akan ditunjukkan (2).

Perhatikan bahwa :

Pilih $z = 1$ maka dari (c5) diperoleh

$$\begin{aligned}
A(((x * y) * y) * x) &\geq \min\{A(1 * (y * x)), A(1)\} \\
A(((x * y) * y) * x) &\geq \min\{A(y * x), A(1)\} && \text{(Proposisi 1.2.8 (1))} \\
A(x * y) * y * x &\geq A(y * x)
\end{aligned}$$

Jadi $A(y * x) \geq A(x * y) * y * x \forall x, y \in S$.

(\Leftarrow) Asumsikan bahwa (2) adalah benar, maka akan ditunjukkan (1) yaitu $A(x * y) * y * x \geq \min\{A(z * (y * x)), A(z)\} \forall x, y, z \in S$.

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}
A(y * x) &\leq A(x * y) * y * x \\
\min\{A(y * x), A(1)\} &\leq A(x * y) * y * x \\
\min\{A(1 * (y * x)), A(1)\} &\leq A(x * y) * y * x \\
A(x * y) * y * x &\geq \min\{A(1 * (y * x)), A(1)\} \\
&\geq \min\{A(z * (y * x)), A(z)\} \\
A(x * y) * y * x &\geq \min\{A(z * (y * x)), A(z)\}
\end{aligned}$$

Jadi A adalah penyinggiran terurut *absorbent* fuzzy dari S jika dan hanya jika $A(y * x) \leq A(((x * y) * y) * x)$, $\forall x, y \in S$, maka Teorema 3.3 terbukti. \square

Lema 3.4. [14] *Misalkan A adalah penyinggiran terurut fuzzy dari S . Himpunan A adalah penyinggiran terurut implikatif positif fuzzy dari S jika dan hanya jika*

$$A(x) \geq A((x * y) * x), \forall x, y \in S. \quad (3.1)$$

Lema 3.5. [14] Misalkan A adalah suatu penyaringan terurut fuzzy dari S . Setiap penyaringan terurut implikatif fuzzy A dari S memenuhi

$$A(x * y) \geq A(x * (x * y)), \forall x, y \in S. \quad (3.2)$$

Teorema 3.6. [8] Misalkan A suatu himpunan semigrup implikatif komutatif fuzzy dari S . Maka A suatu penyaringan terurut implikatif positif fuzzy dari S jika dan hanya jika

- (1) A adalah suatu penyaringan terurut implikatif fuzzy dari S .
- (2) A adalah suatu penyaringan terurut absorbent fuzzy dari S .

Bukti. (\Rightarrow) Misalkan A adalah suatu penyaringan terurut implikatif positif fuzzy dari S . Maka A adalah suatu penyaringan terurut implikatif fuzzy dari S berdasarkan Teorema 2.6. Akan dibuktikan bahwa A adalah suatu penyaringan terurut *absorbent* fuzzy dari S yaitu dengan menunjukkan (c1) dan (c5).

Perhatikan bahwa :

$$\forall x, y \in S$$

$$\begin{aligned} x &\preceq ((x * y) * y) * x && \text{(Proposisi 1.2(4))}. \\ x * y &\preceq (((x * y) * y) * x) * y && \text{(Proposisi 1.2(5))}. \end{aligned}$$

Misalkan $((x * y) * y) * x = b$, maka

$$\begin{aligned} (b * y) * b &= (((x * y) * y) * x) * y * (((x * y) * y) * x) \\ &\preceq (x * y) * (((x * y) * y) * x) && \text{(Proposisi 1.2(5))}. \\ &= ((x * y) * y)((x * y) * x) && \text{(Proposisi 1.3(1))}. \\ &\preceq y * x && \text{(Proposisi 1.3(4))}. \\ (b * y) * b &\preceq y * x \end{aligned}$$

Karena A adalah suatu ketetapan urutan maka

$$A((b * y) * b) \geq A(y * x)$$

Berdasarkan Lema 3.4 maka

$$\begin{aligned} A(b) &\geq A((b * y) * b) \\ A(((x * y) * y) * x) &\geq A((b * y) * b) \\ &\geq A(y * x) \end{aligned}$$

Karena $A(y * x) \leq A(((x * y) * y) * x)$, $\forall x, y \in S$ dan berdasarkan Teorema 3.3 maka A adalah suatu penyaringan terurut *absorbent* fuzzy dari S .

(\Leftarrow) Asumsikan A adalah suatu penyaringan terurut implikatif fuzzy dan penyaringan terurut *absorbent* fuzzy dari S . Akan dibuktikan A adalah suatu penyaringan terurut implikatif positif fuzzy dari S yaitu dengan menunjukkan $A(x) \geq A((x * y) * x)$, $\forall x, y \in S$.

Perhatikan bahwa $\forall x, y \in S$ berlaku

$$\begin{aligned} x &\preceq (x * y) * x && \text{(Proposisi 1.3(2))} \\ (x * y) * x &\preceq (x * y) * ((x * y) * y) && \text{(Proposisi 1.2(5))}. \\ A((x * y) * x) &\leq A((x * y) * ((x * y) * y)). \end{aligned}$$

Berdasarkan (3.2) maka

$$\begin{aligned} A((x * y) * y) &\geq A((x * y) * ((x * y) * y)) \\ A((x * y) * y) &\geq A((x * y) * x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Karena

$$\begin{aligned} x * y &\succeq y && \text{(Proposisi 2.2.8 (4)).} \\ (x * y) * x &\preceq y * x && \text{(Proposisi 1.2(5)).} \\ A(y * x) &\geq A((x * y) * x) \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 3.3(2) maka

$$\begin{aligned} A((x * y) * y) * x &\geq A(y * x) \\ A((x * y) * y) * x &\geq A((x * y) * x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Berdasarkan (3.3) dan (3.4) maka

$$\min\{A((x * y) * y), A(((x * y) * y) * x)\} \geq A((x * y) * x) \quad (3.5)$$

Selanjutnya berdasarkan (c2) diperoleh

$$A(x) \geq \min A(y * x), A(y)$$

Misalkan $y = ((x * y) * y)$, maka

$$A(x) \geq \min\{A(((x * y) * y) * x), A((x * y) * y)\} \quad (3.6)$$

Dari (3.5) dan (3.6) diperoleh

$$A(x) \geq A((x * y) * x)$$

Karena $A(x) \geq A((x * y) * x)$, $\forall x, y \in S$ dan berdasarkan Lemma 3.4 maka A adalah suatu penyingkatan terurut implikatif positif fuzzy dari S . \square

Teorema 3.7. [8] *(Perluasan Sifat)* Misalkan A dan B adalah suatu penyingkatan terurut fuzzy dari suatu semigrup implikatif komutatif S sedemikian sehingga $A(1) = B(1)$ dan $A(x) \subset B(x)$, yang artinya $A(x) \leq B(x)$. Jika A adalah suatu penyingkatan terurut absorbent fuzzy dari S , maka B juga suatu penyingkatan terurut absorbent fuzzy dari S .

Bukti. Asumsikan bahwa A adalah suatu penyingkatan terurut *absorbent* fuzzy dari S . Akan ditunjukkan bahwa B adalah penyingkatan terurut *absorbent* fuzzy dari S .

Karena A adalah suatu penyingkatan terurut *absorbent* fuzzy dari S , maka berlaku $A(((x * y) * y) * x) \geq \min\{A(z * (y * x)), A(z)\}$, $\forall x, y, z \in S$.

Misalkan $x = (y * x) * x$ maka

$$A((((y * x) * x) * y) * y) * ((y * x) * x) \geq \min\{A(z * (y * ((y * x) * x))), A(z)\}$$

Pilih $z = 1$, maka diperoleh

$$A((((y * x) * x) * y) * y) * ((y * x) * x) \geq \min\{A(1 * (y * ((y * x) * x))), A(1)\}$$

$$A((((y * x) * x) * y) * y) * ((y * x) * x) \geq \min\{A(y * ((y * x) * x)), A(1)\} \text{ (Proposisi 1.2(1))}$$

$$A((((y * x) * x) * y) * y) * ((y * x) * x) \geq A(y * ((y * x) * x))$$

Berdasarkan asumsi bahwa $A \subset B$ maka $A(x) \leq B(x)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} B((((y * x) * x) * y) * y) * ((y * x) * x) &\geq A((((y * x) * x) * y) * y) * ((y * x) * x) \\ &\geq A(y * ((y * x) * x)) \\ &= A((y * x) * (y * x)) \\ &= A(1) \end{aligned}$$

Karena berdasarkan asumsi bahwa $A(1) = B(1)$, maka

$$B((((y * x) * x) * y) * y) * ((y * x) * x) \geq B(1) \quad (3.7)$$

Perhatikan bahwa $\forall x, y \in S$ berlaku

$$\begin{aligned} x &\preceq (y * x) * x && \text{(Proposisi 1.2(4))} \\ x * y &\preceq ((y * x) * x) * y && \text{(Proposisi 1.2(5))} \\ (x * y) * y &\preceq (((y * x) * x) * y) * y && \text{(Proposisi 1.2(5))} \\ ((x * y) * y) * x &\preceq (((y * x) * x) * y) * y * x && \text{(Proposisi 1.2(5))} \end{aligned}$$

Karena B adalah suatu penyaringan terurut fuzzy dari S , maka

$$B(((x * y) * y) * x) \geq B((((y * x) * x) * y) * y) * x$$

Berdasarkan (c2) yaitu $B(y) \geq \min B(x * y), B(x)$

Misalkan $x = y * x$ dan $y = (((y * x) * x) * y) * y * x$, maka

$$\begin{aligned} B((((y * x) * x) * y) * y) * x &\geq \min B(y * x) * (((y * x) * x) * y) * y * x, B(y * x) \\ &= \min B((((y * x) * x) * y) * y) * ((y * x) * x), B(y * x) \\ &\quad \text{(Proposisi 1.3(1))} \\ &\geq \min\{B(1), B(y * x)\} \text{ (persamaan 3.7)} \\ &= B(y * x). \quad \square \end{aligned}$$

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Ibu Dr. Yanita dan Ibu Monika Rianti Helmi M, Si yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

- [1] Birkhoff, G. 1967. *Lattice Theory*. American Mathematical Society. Vol. XXV.
- [2] Blyth, T. S. 1965. *Pseudo-residual in Semigroups*. London Mathematical Society. **40**: 441-454.
- [3] Chan, M. W. dan K. P. Shum. 1993. *Homomorphism of Implicative Semigroups*. Semigroup Forum. **46**(1): 7-15.
- [4] Connell, E. H. 2002. *Elements of Abstract and Linear Algebra*. Department of Mathematicc. University of Miami, USA.
- [5] Curry, H. B. 1963. *Foundation of Mathematics Logic*. McGrow-Hill, New York.
- [6] Jun, Y. B. 1999. *Implicative Ordered Filters of Implicative Semigroups*. Korean Mathematical Society, Korea. **14**(1): 47-55.

- [7] Jun, Y. B. 2007. *Folding Theory Applied to Implicative Ordered Filters of Implicative Semigroups*. **31**: 893-901.
- [8] Jun, Y. B., C. H. Park dan D. R. P. Williams. 2009. *Absorbent Ordered Filters and Their Fuzzifications in Implicative Semigroups*. Iranian Journal of Fuzzy Systems. **6**(1): 45-61.
- [9] Jun, Y. B. dan K. H. Kim. 2000. *Positive Implicative Ordered Filters of Implicative Semigroups*. Internat. J. Math. dan Math. Sci. **23**(12): 801-806.
- [10] Jun, Y. B., J. Meng dan X. L. Xin. 2000. *On Ordered Filters of Implicative Semigroups*. Semigroup Forum. **54**: 75-82.
- [11] Nemitz, W. C. 1995. *Implicative Semi-lattice*. American Mathematical Society. **117**: 128-142.
- [12] Fitra, R. I. 2014. *Penyaringan Terurut Implikatif Positif dari Semigrup Implikatif*. Skripsi-S1. Universitas Andalas, Padang.
- [13] Samanta, S. R. T. K. 2012. *A Note on Fuzzy soft Topological spaces* . Annals of Fuzzy Mathematics Informatics, Vol. 3, No. 2.
- [14] Jun, Y. B, K. H. Kim, H. S. Kim. 2002. *Fuzzy Positive Implicative Ordered Filters of Implicative Semigroups* . Korean Mathematical Society, Vol. 32, No. 5.