Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **3** Hal. 90 – 94
ISSN : 2303–2910


# BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF $P_n \circ K_m$, $n \geq 1$ DAN $m \geq 2$

MIRA ADRIANI, NARWEN

*Program Studi Matematika,*
*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,*
*Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.*
*email : mira.adriani@yahoo.com*

**Abstrak.** Misalkan terdapat suatu graf terhubung $G = (V, E)$. Bilangan kromatik lokasi dari $G$ adalah minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf $G$. Kelas warna pada graf terhubung $G$ dan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ berdasarkan suatu pewarnaan titik. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai vektor$-k$ :

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x|x \in S_i)\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di $G$ memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu $\Pi$, maka $c$ disebut pewarnaan lokasi dari $G$. Pada makalah ini akan dikaji kembali tentang penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf $P_n \circ K_m$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$, seperti yang telah dipaparkan dalam [2].

*Kata Kunci*: Pewarnaan Lokasi, Bilangan Kromatik Lokasi, Graf Korona

## 1. Pendahuluan

Suatu pewarnaan titik dengan $k$ warna pada graf $G$ adalah suatu pemetaan $c : V \to \{1, 2, \cdots, k\}$ sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika $u$ dan $v$ bertetangga. Jika banyaknya warna yang digunakan sebanyak $k$ maka $G$ dikatakan mempunyai $k$ pewarnaan. Bilangan kromatik dari $G$ adalah bilangan asli terkecil $k$ sedemikian sehingga, jika titik-titik di $G$ diwarnai dengan $k$ warna maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari $G$ dinotasikan dengan $\chi(G)$. Misalkan $\chi(G) = k$, ini berarti titik-titik di $G$ paling kurang diwarnai dengan $k$ warna dan tidak dapat diwarnai dengan $k - 1$ warna.

Kelas warna pada $G$ dinotasikan dengan $S_i$, merupakan himpunan titik-titik yang berwarna $i$ dan $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi $v$ terhadap $\Pi$ disebut kode warna dari $v$ dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai vektor $-k$ :

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x|x \in S_i)\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di $G$ memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu $\Pi$, maka $c$ disebut *pewarnaan lokasi* dari $G$. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf $G$ disebut *bilangan kromatik lokasi*, dinotasikan sebagai $\chi_L(G)$.

Pada Lema 1.1 berikut diberikan syarat untuk pewarnaan lokasi terhadap suatu graf terhubung $G$.

**Lema 1.1.** [2] *Misalkan terdapat graf terhubung tak trivial $G$. Misalkan terdapat dua titik $u, v \in V(G)$, dan $c$ adalah pewarnaan lokasi untuk $G$. Jika $d(u,w) = d(v,w)$ untuk semua $w \in V(G) \setminus \{u,v\}$, maka $u$ dan $v$ haruslah diwarnai berbeda.*

**Bukti.** Misalkan $c$ adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung $G$ dan misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ adalah partisi dari titik-titik $G$ kedalam $k$ buah kelas warna. Andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik $u$ dan $v$ berada dalam kelas warna yang sama, misalkan di kelas $S_i$. Akibatnya $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$. Karena $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u,v\}$, maka $d(u, S_j) = d(v, S_j)$ untuk $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga $c$ bukan pewarnaan lokasi. Kontradiksi. Maka haruslah $c(u) \neq c(v)$. $\square$

Misalkan terdapat graf lintasan $P_n$ dengan $V(P_n) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$; dan graf lengkap $K_m$ dengan $V(K_m) = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Misalkan terdapat sebanyak $n$ duplikat graf lengkap $K_m$, notasikan dengan $K_{m_i}$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Graf $P_n \circ K_m$ adalah graf yang diperoleh dari $P_n$ dan $n$ duplikat graf lengkap $K_m$, dengan cara menghubungkan titik $x_i$ di $P_n$ ke $m$ buah titik di graf $K_{m_i}$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$.

## 2. Bilangan Kromatik Lokasi $P_n \circ K_m$

Pada bagian ini akan dipaparkan kembali penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf $P_n \circ K_m$ untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 2$, sebagaimana telah dikaji dalam [2].

**Teorema 2.1.** [2] *Bilangan kromatik lokasi dari $P_n \circ K_m$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$ sebagai berikut.*

$$\chi_L(P_n \circ K_m) = \begin{cases} m+1, & \textit{jika } n = 1, \\ m+2, & \textit{jika } 2 \leq n \leq 2(m+2), \\ m+3, & \textit{jika } n \geq 2(m+2)+1. \end{cases} \tag{2.1}$$

**Bukti.** Setiap dua titik yang ada di $K_{m_i}$ harus dalam kelas warna yang berbeda. Selanjutnya karena $x_i$ bertetangga dengan semua titik dari $K_{m_i}$, maka $x_i$ haruslah berada dalam kelas warna yang berbeda dengan semua kelas warna di $V(K_{m_i})$.

Pembuktian diberikan dalam tiga kasus.

**Kasus 1**. $n = 1$.

Akan ditunjukkan bahwa untuk $n = 1$, bilangan kromatik lokasi dari graf $P_n \circ K_m$ adalah

$$\chi_L(P_1 \circ K_m) = m + 1.$$

Tuliskan $V(P_1) = \{x_1\}$, $V(K_m) = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ dan $E(K_m) = \{a_i a_j | i = 1, 1 \leq j \leq m\}$. Karena $P_i$ hanya terdiri dari satu titik, maka duplikat $K_m$ hanya sebanyak satu buah. Selanjutnya $V(P_1 \circ K_m) = \{x_1, a_1, \cdots, a_m\}$ dan $E(P_1 \circ K_m) = \{x_1 a_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{a_i a_j | i = 1, 1 \leq j \leq m\}$.

Sesuai definisi, maka diperoleh bahwa $P_1 \circ K_m \simeq K_{m+1}$. Karena $K_{m+1}$ adalah graf lengkap dengan $m+1$ titik, maka setiap dua titik di $K_{m+1}$ bertetangga. Sesuai dengan definisi pewarnaan bahwa setiap dua titik bertetangga memiliki warna yang berbeda, maka untuk mewarnai $m+1$ titik di $K_{m+1}$ dibutuhkan sebanyak $m+1$ warna, sehingga diperoleh bahwa

$$\chi_L(P_n \circ K_m) = \chi_L(K_{m+1}) = m+1, \text{ untuk } m \geq 1.$$

**Kasus 2**. $2 \leq n \leq 2(m+2)$.
Akan dibuktikan bahwa untuk $2 \leq n \leq 2(m+2)$, bilangan kromatik lokasi dari graf $P_n \circ K_m$ adalah $\chi_L(P_n \circ K_m) = m+2$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} V(P_n) &= \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \\ V(K_{m_i}) &= \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im} | 1 \leq i \leq n\} \\ &= \{a_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}, \end{aligned}$$

Definisikan $A_i = \{x_i\} \cup \{V(K_{m_i})\}$, atau himpunan yang berisi gabungan titik $x_i$ dengan titik-titik yang ada di $K_{m_i}$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$.
**Fakta 1.**
Tidak ada dua bilangan bulat $i$ dan $j$ sehingga $c(A_i) = c(A_j)$, $c(x_i) \neq c(x_j)$. Hal ini benar, karena jika $j = i+1$ dan $i = 1$ maka $x_i$ dan $a_{jk}$ untuk suatu $k$, akan memiliki kode warna yang sama. Jika $j = i+1$ dan $i \neq 1$ maka salah satu titik ($x_j$ dan $a_{ik}$) atau ($a_{ik}$ dan $a_{ji}$), akan memiliki kode warna yang sama untuk suatu $k$, $l$.

Untuk membedakan titik $x_i$ dengan titik dari $K_{m_j}$, diperoleh $x_{i-1} \in S_m$ atau $x_{i+1} \in S_m$. Dengan cara yang sama, akan diperoleh $x_{j-1} \in S_m$ atau $x_{j+1} \in S_m$. Oleh karena itu, terdapat dua titik $a_{ik}$ dan $a_{jl}$ dengan kode warna yang sama untuk suatu $k$, $l$.
**Fakta 2.**
Tidak ada bilangan bulat $i$, $j$ dan $k$ sehingga $c(A_i) = c(A_j) = c(A_k)$ dan $c(x_i) = c(x_j) = c(x_k)$. Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $c(A_i) = [1, m+1]$ dan $c(x_i) = m$ untuk $i < j < k$, maka $j \geq i+2$ dan $k \geq j+2$. Jadi, $d(x_i, S_m) = 1$ atau 2. Ini menunjukkan bahwa kode warna dua titik yang berada dalam $\{x_i, x_j, x_k\}$ akan sama.

Dari dua fakta ini, dapat disimpulkan bahwa terdapat pewarnaan dengan $(m+2)$ warna di $G$, atau dituliskan $(m+2)-$pewarnaan $c$ di $G$. Jika $c(A_i) = c(A_j)$, untuk $i < j$, maka $c(x_i) = c(x_j)$ dan tidak dapat diperoleh tiga $A_i$ dengan $c(A_i)$ yang sama. Oleh karena itu, sebuah $(m+2)-$pewarnaan $c$ hanya ada di $G$ jika $n \leq 2(m+2)$.

Berikut adalah warna yang diberikan untuk semua titik di $P_n \circ K_m$.

$$c(x_i) = \begin{cases} i, & \text{jika } 1 \le i \le m+1, \\ 1, & \text{jika } i = m+2, \\ m+2, & \text{jika } i = m+3 \text{ atau } i = m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 4, \\ 3 + 2(i-m-4), & \text{jika } m \text{ genap}, m+4 \le i \le m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 3, \\ 2 + 2(i - m - \lceil \frac{m}{2} \rceil - 5), & \text{jika } m \text{ genap}, m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 5 \le i \le n, \\ 2 + 2(i-m-4), & \text{jika } m \text{ ganjil}, m+4 \le i \le m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 3, \\ 3 + 2(i - m - \lceil \frac{m}{2} \rceil - 5), & \text{jika } m \text{ ganjil}, m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 5 \le i \le n. \end{cases}$$

$$c(V(K_{m_i})) = \begin{cases} [1, m+2] - \{1, m+2\}, & \text{jika } i = m+3 \text{ atau } i = m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 4, \\ [1, m+2] - \{c(x_i), c(x_i)+1\}, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa $c$ adalah pewarnaan lokasi di $G \simeq P_n \circ K_m$, untuk $2 \le n \le 2(m+2)$. Misalkan $u$ dan $v$ adalah dua titik di $G$ yang berada di kelas warna yang sama. Terdapat tiga kasus berikut.

**Kasus 2.1** Jika $u = x_i$ dan $v = x_j$ untuk suatu $i, j$ maka akan diperoleh kode warna yang berbeda.

**Kasus 2.2** Jika $u = x_i$ dan $v = a_{jk}$, untuk suatu $i, j, k$ maka $1 = d(u, S_t) < d(v, S_t)$ dimana $t = c(j) + 1( \mod m+2)$.

**Kasus 2.3** Jika $u = a_{ik}$ dan $v = a_{jl}$, untuk suatu $i, j, k, l$ maka $d(u, S_t) \ne d(v, S_t)$ dimana $t = c(j) + 1( \mod m+2)$.

Oleh karena itu $c$ adalah pewarnaan lokasi di $G$.

**Kasus 3**. $n \ge 2(m+2)+1$.

Akan ditunjukkan bahwa untuk $n \ge 2(m+2)+1$, bilangan kromatik lokasi dari graf $P_n \circ K_m$ adalah $\chi_L(P_n \circ K_m) = m+3$. Untuk menampilkan batas atas, definisikan pewarnaan $c : V(P_n \circ K_m) \to [1, m+3]$ sehingga:

$$c(x_i) = \begin{cases} m+3, & \text{jika } i = 1, \\ 2, & \text{jika } i \text{ genap}, \\ 3, & \text{jika } i \text{ ganjil}, i \ne 1 \end{cases}$$

$$c(V(K_{m_i})) = \begin{cases} [1, m], & \text{jika } i = 1, \\ [1, m+2] - \{2, 3\}, & \text{jika selainnya.} \end{cases}$$

Untuk menunjukkan bahwa $c$ adalah pewarnaan lokasi di $G$, cukup dilihat kasus titik $u, v$ seperti $d(u, x_1) = d(v, x_1)$. Ini berarti bahwa $u = a_{ik}$ dan $v = x_{i+1}$ untuk suatu $i, k$. Jika $i > 1$ maka $u$ dan $v$ harus dalam kelas warna yang berbeda di $c$. Jika $i = 1$ maka $d(u, s_{m+1}) \ne d(v, s_{m+1})$. Oleh karena itu $c$ adalah pewarnaan lokasi di $G$. □

## 3. Kesimpulan

Bilangan kromatik lokasi dari graf hasil korona antara graf lintasan $P_n$ dan $K_m$, yaitu $P_n \circ K_m$ dengan $n \ge 1$ dan $m \ge 2$ adalah sebagai berikut.

$$\chi_L(P_n \circ K_m) = \begin{cases} m+1, & \text{jika } n = 1, \\ m+2, & \text{jika } 2 \le n \le 2(m+2), \\ m+3, & \text{jika } n \ge 2(m+2)+1. \end{cases}$$

## 4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Drs. Effendi, M. Si dan Bapak Drs Syafruddin, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

## Daftar Pustaka

[1] Asmiati, H. Assiyatun, E.T. Baskoro, 2011, Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars, *ITB Journal of Science*, 43A (1) : 1 – 8

[2] Baskoro, E.T, Purwasih, I. A, 2012, The Locating-Chromatic Number for Corona Product of Graphs. *Southeast-Asian Journal of Sciences*: 1(1) : 124 – 134

[3] Bondy, J. A, Murty, U. S. R. 1976. *Graph Theory with Applications.* Macmillan, London

[4] Budayasa, K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya.* Universitas Negeri Surabaya, Surabaya.

[5] Chartrand, G., dkk. 2003. Graphs of order $n$ with locating-chromatic number $n-1$. *Discrete Math.* **269** : 65 – 79

[6] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A, Slater, P. J., Zhang, P., 2002, The Locating-Chromatic Number of Graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**: 89 – 101