Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **4** Hal. 28 – 33
ISSN : 2303–2910
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

DIMENSI METRIK GRAF HASILKALI KARTESIUS DUA LINTASAN ($P_n \times P_m$) KORONA GRAF LENGKAP K_1

DWI PURWATI, BUDI RUDIANTO

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
dwi.purwatii@yahoo.com

Abstrak. Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$ dan $W \subseteq V(G)$, dimana $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$. Representasi metrik dari titik $v \in V$ terhadap W adalah

$$r(v \mid W) = (d(v, v_1), d(v, v_2), \cdots, d(v, v_k)).$$

Himpunan W dikatakan sebagai *resolving set* di G jika untuk setiap pasangan dari titik-titik berbeda $u, v \in V$, $r(u \mid W) \neq r(v \mid W)$. *Dimensi metrik* dari G adalah kardinalitas minimum dari *resolving set* untuk G dan dinotasikan $\dim(G)$. Graf $(P_n \times P_m)$ adalah graf hasil kali Kartesius antara graf lintasan dengan n titik dan graf lintasan dengan m titik. Graf $(P_n \times P_m) \odot K_1$ adalah graf yang diperoleh dari graf $(P_n \times P_m)$ dengan nm titik dan graf lengkap K_1, dengan cara menghubungkan titik v_{ij} di $(P_n \times P_m)$ ke titik u_{ij}, yang merupakan salinan ke-ij dari graf K_1, untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$. Pada makalah ini dikaji kembali [4] yang membahas tentang penentuan $\dim((P_n \times P_m) \odot K_1$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.

Kata Kunci: Dimensi metrik, resolving set, hasil kali kartesius, graf korona

1. Pendahuluan

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dan $u, v \in V$ adalah dua titik berbeda dari graf G, jarak $d(u, v)$ antara dua titik u dan v adalah panjang dari lintasan terpendek antara u dan v. Misalkan terdapat himpunan titik-titik $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ dari graf G. Representasi metrik dari titik $v \in V$ terhadap W adalah

$$r(v \mid W) = (d(v, v_1), d(v, v_2), \cdots, d(v, v_k)).$$

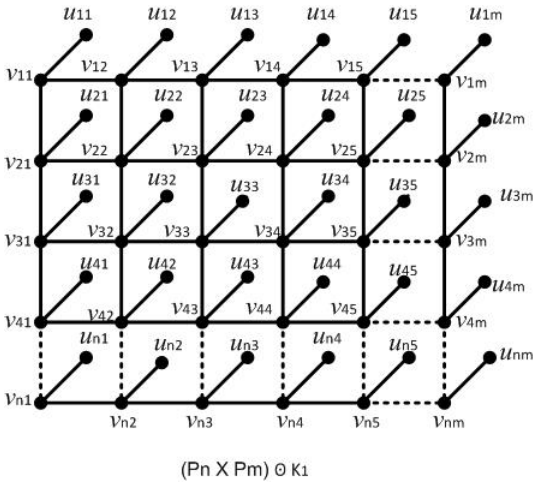
Himpunan W dikatakan sebagai himpunan pembeda (*resolving set*) di G jika untuk setiap pasangan dari titik-titik berbeda $u, v \in V$, $r(u \mid W) \neq r(v \mid W)$. Himpunan pembeda (*resolving set*) dengan kardinalitas minimum untuk graf G disebut dengan himpunan pembeda (*resolving set*) minimum atau basis dari G. Dimensi metrik dari G adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda (*resolving set*) untuk G dan dinotasikan $\dim(G)$.

Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dan graf H dengan himpunan titik $V(H) = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$. Hasil kali Kartesius (*Cartesian Product*) dari graf G dan H adalah $G \times H$, yang dibentuk oleh titik-titik $V = \{w_{ij} \mid w_{ij} = (v_i, u_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan dua titik (v_i, u_j) dan (v_k, u_l) bertetangga di $G \times H$ jika dan hanya jika ($v_i = v_k$ dan u_j bertetangga u_l) atau (v_i bertetangga v_k dan $u_j = u_l$).

Salinan adalah graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi yang sama dari graf G. Misal terdapat graf G dengan n titik. Graf G korona H, dinotasikan $G \odot H$ didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf G dan n salinan $H_1, H_2, \cdots, H_n$ dari graf H, kemudian menghubungkan titik ke-i dari G ke setiap titik di H_i, untuk $1 \leq i \leq n$.

2. Dimensi Metrik Dari Graf $(P_n \times P_m) \circ K_1$

Misalkan terdapat graf P_n dengan himpunan titik $V(P_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dan graf P_m dengan himpunan titik $V(P_m) = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ dan graf K_1 dengan $V(K_1) = \{x_1\}$. Graf $(P_n \times P_m)$ adalah graf hasil kali Kartesius antara graf P_n dan graf P_m. Graf $(P_n \times P_m) \odot K_1$ adalah graf yang diperoleh dari graf $(P_n \times P_m)$ dengan nm titik dan graf lengkap K_1 dengan cara menghubungkan titik v_{ij} di $(P_n \times P_m)$ ke titik u_{ij}, yang merupakan salinan ke-ij dari graf K_1, untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$.



Gambar 1. Graf $(P_n \times P_m) \odot K_1$

Teorema 2.1. [4] *Jika* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 2$, *maka* $\dim((P_n \times P_m) \odot K_1) = 3$.

Bukti. Misalkan $V(P_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah himpunan titik dari graf P_n dan $V(P_m) = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ adalah himpunan titik dari graf P_m. Definisikan $V(P_n \times P_m) = \{v_{ij} \mid v_{ij} = (v_i, u_j)\}$ dan titik pendant dari v_{ij} pada $(P_n \times P_m) \odot K_1$ dinotasikan sebagai u_{ij}. Karena $(P_n \times P_m) \odot K_1$ bukan lintasan, maka $\dim((P_n \times P_m) \odot K_1) \geq 2$.

Akan ditunjukkan $\dim((P_n \times P_m) \odot K_1) \geq 3$, yaitu dengan menunjukkan bahwa jika himpunan pembeda terdiri dari dua anggota, akan diperoleh dua titik pada graf tersebut dengan representasi yang sama.

Pilih $W' = \{a, b\}$ adalah himpunan pembeda untuk $(P_n \times P_m) \odot K_1$. Jika terdapat dua lintasan berbeda dengan panjang $d(a, b)$ antara a dan b, maka terdapat dua titik-titik berbeda c, d dari $(P_n \times P_m) \odot K_1$ sedemikian sehingga $d(c, a) = d(d, a)$ dan $d(c, b) = d(d, b)$, kontradiksi. Misalkan hanya ada satu lintasan Q, dengan panjang $d(a, b)$, antara a dan b. Dengan demikian semua titik-titik dari Q, kecuali mungkin a atau b yang bisa menjadi titik-titik pendan, akan terdapat didalam $P_n \times P_m$.

Pandang dua kasus berikut.

Kasus 1. Setiap titik yang berada dalam lintasan Q memiliki derajat ≤ 3.
Diperoleh bahwa $m = 2$ dan $W' \subset \{u_{11}, v_{11}, u_{12}, v_{12}\}$ atau $W' \subset \{u_{n1}, v_{n1}, u_{n2}, v_{n2}\}$. Misalkan $W' \subset \{u_{11}, v_{11}, u_{12}, v_{12}\}$. Maka untuk titik-titik $u_{1i}, v_{1,i+1}$, dengan $2 \leq i \leq n-1$, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} d(u_{i1}, a) &= d(u_{i1}, v_{11}) + d(v_{11}, a), \\ &= d(v_{i+1,1}, v_{11}) + d(v_{11}, a), \\ &= d(v_{i+1,1}, a), \\ d(u_{i1}, b) &= d(u_{i1}, v_{11}) + d(v_{11}, b) \\ &= d(v_{i+1,1}, v_{11}) + d(v_{11}, b) \\ &= d(v_{i+1,1}, b). \end{aligned}$$

Dengan demikian, $r(u_{i1} \mid W') = r(v_{i+1,1} \mid W')$, kontradiksi.
Sebaliknya, jika $W' \subset \{u_{n1}, v_{n1}, u_{n2}, v_{n2}\}$, maka untuk titik-titik $u_{i1}, v_{i-1,1}, 2 \leq i \leq n-1$ berlaku

$$\begin{aligned} d(u_{i1}, a) &= d(u_{i1}, v_{n1}) + d(v_{n1}, a) \\ &= d(v_{i-1,1}, v_{n1}) + d(v_{n1}, a) \\ &= d(v_{i-1,1}, a), \\ d(u_{i1}, b) &= d(u_{i1}, v_{n1}) + d(v_{n1}, b) \\ &= d(v_{i-1,1}, v_{n1}) + d(v_{n1}, b) \\ &= d(v_{i-1,1}, b). \end{aligned}$$

Dengan demikian, $r(u_{i1} \mid W') = r(v_{i-1,1} \mid W')$, kontradiksi.

Kasus 2. Terdapat titik v berderajat 4 yang berada dalam lintasan Q.
Maka diperoleh bahwa v memiliki dua tetangga c, d bukan termasuk Q, sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} d(c, a) &= 1 + d(v, a) = d(d, a), \\ d(c, b) &= 1 + d(v, b) = d(d, b). \end{aligned}$$

Dengan demikian, $r(c \mid W') = r(d \mid W')$, kontradiksi.
Karena itu, $\dim((P_n \times P_m) \odot K_1) \geq 3$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $dim((P_n \times P_m) \odot K_1) \leq 3$.
Pilih $W = \{v_{11}, v_{1m}, v_{nm}\}$ sebagai himpunan pembeda untuk $(P_n \times P_m) \odot K_1$. Maka

representasi dari titik-titik $(P_n \times P_m) \odot K_1$ terhadap W adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} r(v_{ij} \mid W) &= (d(v_{ij}, v_{11}), d(v_{ij}, v_{1m}), d(v_{ij}, v_{nm})) \\ &= (i+j-2, m+i-j-1, m+n-i-j), \\ r(u_{ij} \mid W) &= (d(u_{ij}, v_{11}), d(u_{ij}, v_{1m}), d(u_{ij}, v_{nm})) \\ &= (i+j-1, m+i-j, m+n-i-j+1). \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa representasi setiap titik di $(P_n \times P_m) \odot K_1$ terhadap W berbeda. Representasi setiap titik di $(P_n \times P_m) \odot K_1$ dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r(v_{11} \mid W) &= (d(v_{11}, v_{11}), d(v_{11}, v_{1m}), d(v_{11}, v_{nm})) = (0, m-1, m+n-2), \\ r(v_{12} \mid W) &= (d(v_{12}, v_{11}), d(v_{12}, v_{1m}), d(v_{12}, v_{nm})) = (1, m-2, m+n-3), \\ &\vdots \\ r(v_{1m} \mid W) &= (d(v_{1m}, v_{11}), d(v_{1m}, v_{1m}), d(v_{1m}, v_{nm})) = (m-1, 0, n-1), \\ &\vdots \\ r(v_{nm} \mid W) &= (d(v_{nm}, v_{11}), d(v_{nm}, v_{1m}), d(v_{nm}, v_{nm})) = (n+m-2, n-1, 0), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} r(u_{11} \mid W) &= (d(u_{11}, v_{11}), d(u_{11}, v_{1m}), d(u_{11}, v_{nm})) = (1, m, m+n-1), \\ r(u_{12} \mid W) &= (d(u_{12}, v_{11}), d(u_{12}, v_{1m}), d(u_{12}, v_{nm})) = (2, m-1, m+n-2), \\ &\vdots \\ r(u_{1m} \mid W) &= (d(u_{1m}, v_{11}), d(u_{1m}, v_{1m}), d(u_{1m}, v_{nm})) = (m, 1, n), \\ &\vdots \\ r(u_{nm} \mid W) &= (d(u_{nm}, v_{11}), d(u_{nm}, v_{1m}), d(u_{nm}, v_{nm})) = (n+m-1, n, 1). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Andaikan terdapat dua titik-titik berbeda x, y dari $(P_n \times P_m) \odot K_1$ sedemikian sehingga $r(x \mid W) = r(y \mid W)$.

(1) Jika $x = v_{ij}$ dan $y = v_{kl}$, maka salah satu dari $i \neq k$ atau $j \neq l$ yang berlaku, dan dari persamaan (2.1), andaikan

$$\begin{gathered} r(v_{ij} \mid W) = r(v_{kl} \mid W) \\ (i+j-2, m+i-j-1, m+n-i-j) = (k+l-2, m+k-l-1, m+n-k-l). \end{gathered}$$

Maka representasi titik-titik $(P_n \times P_m) \odot K_1$ dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{gathered} r(v_{11} \mid W) = r(v_{22} \mid W) \\ (0, m-1, m+n-2) \neq (2, m-1, m+n-4), \end{gathered}$$

yang mengakibatkan $i = k$ dan $j = l$, tidak memungkinkan $i \neq k$ dan $j \neq l$.

(2) Jika $x = u_{ij}$ dan $y = u_{kl}$ dari persamaan (2.2), dengan cara yag sama, andaikan

$$\begin{gathered} r(u_{ij} \mid W) = r(u_{kl} \mid W) \\ (i+j-1, m+i-j, m+n-i-j+1) = (k+l-1, m+k-l, m+n-k-l+1). \end{gathered}$$

Maka representasi titik-titik $(P_n \times P_m) \odot K_1$ dijabarkan sebagai berikut:

$$r(v_{11} \mid W) = r(v_{22} \mid W)$$
$$(1, m, m+n-1) \neq (3, m, m+n-3),$$

yang mengakibatkan $i = k$ dan $j = l$, kontradiksi.

(3) Jika $x = v_{ij}$ dan $y = u_{kl}$, dari persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) diperoleh bahwa

$$r(v_{ij} \mid W) = r(u_{kl} \mid W)$$
$$(i+j-2, m+i-j-1, m+n-i-j) = (k+l-1, m+k-l, m+n-k-l+1),$$

Perhatikan bahwa,

$$i + j - 2 = k + l - 1 \Leftrightarrow i + j = k + l + 1, \tag{2.3}$$
$$m + i - j - 1 = m + k - l \Leftrightarrow i - j = k - l + 1, \tag{2.4}$$
$$m + n - i - j = m + n - k - l + 1 \Leftrightarrow i + j = k + l - 1. \tag{2.5}$$

Dari persamaan (2.3) dan persamaan (2.5) diperoleh $1 = -1$, yang merupakan kontradiksi.

Dengan demikian, untuk setiap titik-titik berbeda x, y dari $(P_n \times P_m) \odot K_1$, $r(x \mid W) \neq r(y \mid W)$. Oleh karena itu, $\dim((P_n \times P_m) \odot K_1) \leq 3$. Sehingga diperoleh $dim((P_n \times P_m) \odot K_1) = 3$. □

3. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah dikaji kembali makalah [4] mengenai dimensi metrik dari graf hasil kali kartesius antara dua lintasan $(P_n \times P_m)$ yang dikoronakan dengan graf lengkap K_1, dinotasikan sebagai $(P_n \times P_m) \odot K_1$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, yaitu diperoleh bahwa $dim((P_n \times P_m) \odot K_1) = 3$.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Syafruddin, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory*. New York: Springer

[2] Caceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I.M., Puertas, M.L., dan Seara, C. 2005. On the metric dimension of some families of graphs. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*. **22** : 129 – 133

[3] Chartrand, G., Eroh, L., Jhonson, M., dan Oellerman, O.R. 2000. Resolvability in graph and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*. **105** : 99 – 107

[4] D. Kuziak, J. A. Rodriguez-Velazquez dan I. G. Yero. Correction to the article "The metric dimension of graph with pendant edges". [Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, **65** (2008) 139-145]. *arXiv:1010.1784v1 [math.CO] 8 Oktober 2010*

[5] F. Harary, R.A. Melter. 1976. On the metric dimension of a graph. *Ars Combinatoria* **2** : 191 – 195

[6] M. Bahri, Nurdin, M. Zakir, G. Mahie dan Darmo. 2013. The metric dimension of cross product of path graphs $P_m \times P_2 \times P_2$, $m \geq 2$. *Manasir.* **1** : 15 – 18

[7] H. Iswadi, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak, A. N. M. Salman. 2008. The metric dimension of graph with pendant edges. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* **65** : 139 – 145