BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF $P_n \odot \overline{K}_m$, DENGAN $n \geq 1$ DAN $m \geq 1$

IVO MUTHIA, NARWEN

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : ivomuthia@gmail.com*

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan dari G . Untuk $1 \leq i \leq k$, definisikan S_i sebagai himpunan titik dengan warna i . Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik v merupakan vektor dengan banyak unsur k yaitu $c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$, dimana $d(v, S_i)$ adalah jarak dari v ke S_i . Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π , maka c disebut pewarnaan lokasi dari G . Bilangan kromatik lokasi dari G , dinotasikan $\chi_L(G)$, adalah minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G . Graf korona $G \odot H$ dari dua graf G dan H adalah graf yang diperoleh dengan mengambil suatu duplikat dari graf G dan sebanyak $|V(G)|$ duplikat dari H , namakan $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$, kemudian titik ke- i dari graf G dihubungkan ke setiap titik di H_i , untuk $i = 1, 2, 3, \dots, |V(G)|$. Pada tulisan ini, akan dikaji kembali makalah [3] tentang bilangan kromatik lokasi dari graf $P_n \odot \overline{K}_m$, $n \geq 1$ dan $m \geq 1$.

Kata Kunci: Pewarnaan Lokasi, Bilangan kromatik lokasi, Graf korona

1. Pendahuluan

Graf adalah diagram yang memuat titik-titik yang disebut vertex (*vertices*) dan garis yang menghubungkan sebarang dua titik yang disebut sisi (*edge*). Dengan kata lain, titik menggambarkan objek-objek tertentu dan sisi menggambarkan hubungan antara objek-objek tersebut. Setiap sisi menghubungkan tepat dua buah titik dan setiap titik dapat memiliki banyak sisi yang menghubungkan dengan titik lainnya. Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n . Setiap titik pada K_n berderajat $n - 1$. Banyaknya sisi dalam graf lengkap G dengan n titik adalah $(n(n - 1))/2$. Komplemen graf lengkap dengan m titik dinotasikan dengan $\overline{K}_m$. Graf lintasan dengan n titik adalah graf dengan dua titik ujung berderajat satu dan $n - 2$ titik berderajat dua. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n .

Suatu graf G adalah pasangan himpunan V dan E , dituliskan $G = (V, E)$, di mana V adalah suatu himpunan **titik** (*vertex*) yang tidak boleh kosong dan E adalah himpunan **sisi** (*edge*) dari V . Misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan titik yang berisi n titik di G dan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ adalah himpunan sisi dengan m sisi di G . Subgraf dari graf $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf $H = (V(H), E(H))$ sedemikian sehingga $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Suatu subgraf dari G dapat diperoleh dengan menghapus suatu titik atau sisi di G .

Komplemen dari graf G , dinotasikan dengan $\overline{G}$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$, dimana dua titik bertetangga di $\overline{G}$ jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak bertetangga di G dan sebaliknya. Suatu graf dikatakan **isomorfik** jika terdapat korespondensi satu-satu, dinotasikan dengan $(\cong)$.

Suatu pewarnaan titik dengan k warna pada graf G adalah suatu pemetaan $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v bertetangga. Jika banyaknya warna yang digunakan sebanyak k maka G dikatakan mempunyai k pewarnaan. Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga, jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π , maka c disebut pewarnaan lokasi (*locating coloring*) dari G . Oleh karena itu, pewarnaan lokasi pada graf G adalah pewarnaan yang membedakan setiap titik di G berdasarkan jaraknya terhadap kelas warna yang dihasilkan. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi (*locating chromatic number*), dinotasikan $\chi_L(G)$.

Misal terdapat dua graf G dan H dengan $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $V(H) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Misal terdapat graf H_i , dengan $V(H_i) = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}\}$, dimana H_i adalah duplikat ke- i dari graf H . Maka himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $G \odot H$ adalah:

$$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i=1}^n V(H_i),$$

$$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{i=1}^n E(H_i) \cup \{x_i a_{ij} | 1 \leq j \leq m, a_i \in V(H_i)\},$$

dengan H_i adalah duplikat dari graf H . Dapat dilihat bahwa :

$$|V(G \odot H)| = |V(G)| + |V(G)| \cdot |V(H)|,$$

$$|E(G \odot H)| = |E(G)| + |V(G)| \cdot |E(H)| + |V(G)| \cdot |V(H)|.$$

2. Lema Pendukung

Lema 2.1. [6] *Misalkan G adalah suatu graf terhubung nontrivial. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi untuk graf G dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, maka u dan v adalah dua titik dengan warna berbeda.*

Bukti. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna S_i untuk suatu titik $u, v \in V(G)$.

Akan dibuktikan dengan menggunakan kontradiksi. Misalkan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misalnya S_i dari $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$. Akibatnya $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, maka $d(u, S_j) = d(v, S_j)$ untuk $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c(u) \neq c(v)$ dengan u dan v suatu pewarnaan yang berbeda. $\square$

3. Bilangan Kromatik Lokasi untuk $P_n \odot \overline{K}_m$

Graf $P_n \odot \overline{K}_m$ adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan P_n dengan n titik dan komplemen dari graf lengkap K_m , yaitu $\overline{K}_m$ dengan m titik dengan cara menghubungkan setiap m titik salinan ke- i dari graf $\overline{K}_m$ ke titik x_i pada graf lintasan P_n untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Dalam bab ini akan dikaji kembali mengenai bilangan kromatik lokasi untuk graf $P_n \odot \overline{K}_m$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$. Perhatikan graf $P_n \odot \overline{K}_m$ pada Gambar 1.

Gambar 1. Graf $P_n \odot \overline{K}_m, n \geq 1, m \geq 1$

Teorema 3.1. [2] Untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 1$, bilangan kromatik lokasi dari $P_n \odot \overline{K}_m$ adalah:

$$\chi_L(P_n \odot \overline{K}_1) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 1, \\ 3, & \text{jika } 2 \leq n \leq 6, \\ 4, & \text{jika } n \geq 7, \end{cases}$$

$$\chi_L(P_n \odot \overline{K}_m) = \begin{cases} m+1, & \text{jika } m \geq 2, 1 \leq n \leq m+1, \\ m+2, & \text{jika } m \geq 2, n \geq m+2. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $V(P_n \odot \overline{K}_m) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup V(H_1) \cup V(H_2) \cup \dots \cup V(H_n)$, dimana $V(H_i) = \{a_{ij} | 1 \leq j \leq m\}$ adalah himpunan titik dari salinan ke- i di $\overline{K}_m$. Pandang dua kasus berikut.

Kasus 1. $m = 1$.

Untuk $n = 1$, $P_1 \odot \overline{K}_1 \cong P_2$, sehingga jelas bahwa $\chi_L(P_1 \odot \overline{K}_1) = 2$. Untuk $m = 1$ dan $2 \leq n \leq 6$, jelas bahwa $\chi_L(P_n \odot \overline{K}_1) \geq 3$. Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(P_2 \odot \overline{K}_1) = 3$, dimana $2 \leq n \leq 6$ seperti pada Gambar 2.

Misal dikonstruksikan kelas warna dari graf $P_1 \odot \overline{K}_1$ sebagai berikut :

$$C_1 = \{x_1\},$$

$$C_2 = \{a_1\}.$$

Untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(P_1 \odot \overline{K}_1) = 2$, cukup dengan menunjukkan bahwa pewarnaan titik yang diberikan berikut memenuhi pewarnaan lokasi. Kode

Gambar 2. Graf $P_1 \odot \overline{K}_1$

warna yang diperoleh adalah :

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(x_1) &= (d(x_1, C_1), d(x_1, C_2)) = (0, 1), \\ c_{\Pi}(a_1) &= (d(a_1, C_1), d(a_1, C_2)) = (1, 0). \end{aligned}$$

Karena setiap titik pada graf $P_1 \odot \overline{K}_1$ memiliki kode warna yang berbeda, maka pewarnaan c merupakan pewarnaan lokasi pada graf $P_1 \odot \overline{K}_1$. Sehingga, terbukti bahwa bilangan kromatik lokasi $\chi_L(P_1 \odot \overline{K}_1) = 2$.

Selanjutnya, untuk $P_4 \odot \overline{K}_1$, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(P_4 \odot \overline{K}_1) = 3$, seperti pada Gambar 3.

Gambar 3. Graf $P_4 \odot \overline{K}_1$

Misalkan dikonstruksi kelas warna dari graf $P_4 \odot \overline{K}_1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x_3, a_1, a_2, a_4\}, \\ C_2 &= \{x_1, a_3\}, \\ C_3 &= \{x_2, x_4\}. \end{aligned}$$

Kode warna yang diperoleh adalah :

$$\begin{aligned}
 c_{\Pi}(x_1) &= (d(x_1, C_1), d(x_1, C_2), d(x_1, C_3)) = (1, 0, 1), \\
 c_{\Pi}(x_2) &= (d(x_2, C_1), d(x_2, C_2), d(x_2, C_3)) = (1, 1, 0), \\
 c_{\Pi}(x_3) &= (d(x_3, C_1), d(x_3, C_2), d(x_3, C_3)) = (0, 1, 1), \\
 c_{\Pi}(x_4) &= (d(x_4, C_1), d(x_4, C_2), d(x_4, C_3)) = (1, 2, 0), \\
 c_{\Pi}(a_1) &= (d(a_1, C_1), d(a_1, C_2), d(a_1, C_3)) = (0, 1, 2), \\
 c_{\Pi}(a_2) &= (d(a_2, C_1), d(a_2, C_2), d(a_2, C_3)) = (0, 2, 1), \\
 c_{\Pi}(a_3) &= (d(a_3, C_1), d(a_3, C_2), d(a_3, C_3)) = (1, 0, 2), \\
 c_{\Pi}(a_4) &= (d(a_4, C_1), d(a_4, C_2), d(a_4, C_3)) = (0, 3, 1).
 \end{aligned}$$

Karena setiap titik pada graf $P_4 \odot \overline{K}_1$ memiliki kode warna yang berbeda, maka pewarnaan c merupakan pewarnaan lokasi pada graf $P_4 \odot \overline{K}_1$. Sehingga, terbukti bahwa bilangan kromatik lokasi $\chi_L(P_4 \odot \overline{K}_1) = 3$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\chi_L(P_n \odot \overline{K}_1) = 4$ untuk $n \geq 7$. Definisikan $c : V(P_n \odot \overline{K}_1) \rightarrow [1, 4]$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 c(x_i) &= \begin{cases} 4, & \text{jika } i = 1, \\ 3, & \text{jika } i \text{ ganjil, } i \neq 1, \\ 2, & \text{jika } i \text{ genap.} \end{cases} \\
 c(a_{i1}) &= \begin{cases} 1, & \text{jika } i = 1 \text{ atau } i \text{ genap,} \\ 2, & \text{selainnya.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pemetaan c adalah pewarnaan lokasi pada $G \cong P_n \odot \overline{K}_1$, dimana jika $d(u, x_1) = d(v, x_1)$ maka $u = a_{i1}$ dan $v = x_{i+1}$ untuk beberapa i . Ini berarti bahwa $u, v \in S_2$ dan $1 = d(v, S_1) < d(u, S_1) = 2$. Maka kode pewarnaan pada u dan v berbeda. Untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(G) \geq 4$ untuk $n \geq 7$, asumsikan dengan suatu kontradiksi, bahwa $\chi_L(G) = 3$, untuk $n \geq 7$. Selanjutnya akan diperoleh bahwa terdapat dua titik di G dengan kode warna yang sama.

Kasus 2. $m > 2$.

Untuk $1 \leq n \leq m + 1$, definisikan $c : V(P_n \odot \overline{K}_m) \rightarrow [1, m + 1]$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 c(x_i) &= i, \\
 c(V(H_i)) &= [1, m + 1] - \{i\} \text{ untuk setiap } i.
 \end{aligned}$$

Maka c merupakan suatu pewarnaan lokasi dari $P_n \odot \overline{K}_m$, untuk $m \geq 2$ dan $1 \leq n \leq m + 1$.

Untuk $n \geq m + 2$, $\chi_L(P_n \odot \overline{K}_m) \geq m + 1$. Sehingga, $\chi_L(P_n \odot \overline{K}_m) \geq m + 2$. Untuk batas atas, konstruksikan pewarnaan $c : V(P_n \odot \overline{K}_m) \rightarrow [1, m + 2]$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 c(x_i) &= \begin{cases} m + 2, & \text{jika } i = 1, \\ m + 1, & \text{jika } i \text{ ganjil, } i \neq 1, \\ m, & \text{jika } i \text{ genap.} \end{cases} \\
 c(a_{ij}) &= \begin{cases} j + 1, & \text{jika } i \text{ genap, } j = m, \\ j, & \text{selainnya.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa c adalah suatu pewarnaan lokasi dari $G \cong P_n \odot \overline{K}_m$, yaitu cukup dengan melihat dua titik berbeda u dan v di G yang memenuhi $d(u, x_1) = d(v, x_1)$. Ini berarti bahwa $u = a_{ij}$ dan $v = x_{i+1}$ untuk suatu i, j . Dalam kasus ini, $1 = d(v, S_{m-1}) < d(u, S_{m-1}) = 2$. Maka kode warna dari u dan v berbeda. Oleh karena itu c adalah pewarnaan lokasi di G . $\square$

4. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah dikaji kembali makalah [3] tentang penentuan bilangan kromatik lokasi untuk graf $P_n \odot \overline{K}_m$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$, sebagai berikut.

$$\chi_L(P_n \odot \overline{K}_1) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 1, \\ 3, & \text{jika } 2 \leq n \leq 6, \\ 4, & \text{jika } n \geq 7, \end{cases}$$

$$\chi_L(P_n \odot \overline{K}_m) = \begin{cases} m + 1, & \text{jika } m \geq 2, \ 1 \leq n \leq m + 1, \\ m + 2, & \text{jika } m \geq 2, \ n \geq m + 2. \end{cases}$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Mahd-hivan Syafwan, Bapak Drs. Syafruddin, M.Si dan Bapak Zulakmal, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

- [1] Asmiati, H. Assiyatun dan E. T. Baskoro. 2011. Locating-chromatic number of amalgamation of stars. *ITB J. Sci.* **1** : 1 – 8
- [2] Asmiati, H. Assiyatun, E. T. Baskoro, D. Suprijanto, R. Simanjuntak, S. Ut-tungadewa. 2012. The Locating-chromatic number of fireckacker graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences* **63**(1) : 11 – 23
- [3] Baskoro, E.T, dan Purwasih, I. A, (2012), The locating-chromatic number for corona product of graphs. *Southeast-Asian J. of Sciences* **1**(1) : 124 – 134
- [4] Bondy, J.A. dan Murty, U. S. R. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmil-lan, London
- [5] Chartrand, G. dkk. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Int. Combin. Appl.* **36** : 89 – 101
- [6] Chartrand, G. dkk. 2003. Graphs of order n with locating-chromatic number $n - 1$. *Discrete Math.* **269** : 65 – 79