Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **1** Hal. 17 – 25
ISSN : 2303–291X

RAINBOW CONNECTION PADA BEBERAPA GRAF

GEMA HISTA MEDIKA
Program Studi Matematika,
Program Pascasarjana FMIPA, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
gemahistamedika@yahoo.co.id

Abstrak. Misalkan G adalah graf terhubung tak-trivial. Definisikan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$, $k \in \mathbb{N}$, dimana dua sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu $u - v$ *path* P di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di P yang memiliki warna sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path.* Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring. Rainbow connection number* dari graf terhubung G, ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected.* Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G. Untuk dua titik u dan v di G, *rainbow u-v geodesic* pada G adalah *rainbow u-v path* yang panjangnya $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v (panjang *u-v path* terpendek di G). Graf G dikatakan *strongly rainbow-connected* jika G memiliki suatu *rainbow u-v geodesic* untuk setiap dua titik u dan v di G. *Minimum* k yang terdapat pada pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$ sedemikian sehingga G adalah *strongly rainbow-connected* dikatakan *strong rainbow connection number,* $src(G)$, di G. Jadi, $rc(G) \leq src(G)$ untuk setiap graf terhubung di G. Pada paper ini akan diulas kembali tentang *strong rainbow connection number* dari graf bipartit lengkap $K_{s,t}$ dengan $1 \leq s \leq t$ dimana $s, t \in \mathbb{N}$ adalah $src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$, sedangkan *rainbow connection number* dari graf bipartit lengkap $K_{s,t}$ dengan $2 \leq s \leq t$ dimana $s, t \in \mathbb{N}$ adalah $rc(K_{s,t}) = \min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 4\}$.

Kata Kunci: *rainbow connection number, strong rainbow connection number*, graf bipartit lengkap.

1. Pendahuluan

Konsep *rainbow connection* pada graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 2006 oleh Chartrand dkk [2]. Misalkan G adalah graf terhubung tak-trivial dan definisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$, $k \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga dua sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu *u-v path* P di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di P yang memiliki warna sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path.*

Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring.* Jelas, jika G adalah *rainbow connected*, maka G terhubung. Sebaliknya, setiap graf terhubung memiliki pewarnaan sisi *trivial* sehingga *rainbow connected* memiliki pewarnaan sisi dengan warna berbeda. *Rainbow connection number* dari graf terhubung G, ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected.*

Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan sebanyak $rc(G)$ warna dikatakan *minimum rainbow coloring.* Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G. Untuk dua titik u dan v di G, *rainbow u-v geodesic* pada G adalah *rainbow u-v path* yang panjangnya $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v (panjang *u-v path* terpendek di G). Graf G dikatakan *strongly rainbow-connected* jika untuk setiap dua titik u dan v di G, terdapat suatu *rainbow u-v geodesic.* Dalam kasus ini, pewarnaan c dikatakan *strong rainbow coloring* di G. *Minimum* k yang terdapat pada pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ sedemikian sehingga G adalah *strongly rainbow-connected* dikatakan *strong rainbow connection number* $src(G)$ di G. Suatu *strong rainbow-coloring* di G yang menggunakan $src(G)$ warna dikatakan *minimum strong rainbow coloring* di G [2].

Rainbow connection dapat digunakan untuk pengamanan pengiriman informasi rahasia antar lembaga. Selain itu, *rainbow connection* juga dapat digunakan dalam bidang jaringan. Misalkan G merepresentasikan suatu jaringan (misalnya, jaringan selular). Misalkan akan disampaikan pesan antara dua titik di pipa, dengan syarat bahwa pada rute antara kedua titik (atau dapat dilihat sebagai sisi di *path*) diberikan sebuah saluran yang berbeda (misalnya, frekuensi yang berbeda). Jelas, yang ingin diminimalkan adalah banyaknya saluran yang berbeda yang digunakan dalam jaringan. Banyak minimal saluran berbeda yang digunakan adalah *rainbow connection number* $rc(G)$ [4]. Pada paper ini akan dikaji tentang *rainbow connection* pada beberapa graf.

2. *Rainbow Connection* pada Beberapa Graf

Berikut disajikan kembali proposisi yang membahas tentang graf G dengan ukuran m yang mempunyai nilai $rc(G)$ dan $src(G)$ $1, 2$ dan m.

Proposisi 2.1. *[2] Misalkan G adalah graf terhubung tak-trivial dengan ukuran m, maka*

a. $rc(G) = src(G) = 1$ *jika dan hanya jika G adalah graf lengkap,*
b. $rc(G) = 2$ *jika dan hanya jika* $src(G) = 2$*,*
c. $rc(G) = m$ *jika dan hanya jika G adalah graf pohon.*

Bukti.

a. Jika G adalah graf lengkap maka pewarnaan yang menetapkan 1 warna untuk setiap sisi di G adalah *strong rainbow 1-coloring.* Jelas bahwa $rc(G) = src(G) = 1$. Di sisi lain, jika G bukan graf lengkap maka terdapat dua titik di G, namakan u dan v yang tidak bertetangga sehingga setiap lintasan *u-v geodesic* pada G memiliki panjang paling sedikit 2 maka diperoleh $src(G) \geq 2$.
b. Misalkan $rc(G) = 2$. Maka haruslah $src(G) \geq 2$. Karena $rc(G) = 2$, ini berarti G memiliki *rainbow 2-coloring* sedemikian sehingga setiap dua titik yang tidak bertetangga dihubungkan oleh suatu *rainbow path* dengan panjang 2. Karena lintasan tersebut adalah *geodesic,* karena tidak mungkin $src(G) > 2$. Maka haruslah $src(G) = 2$.

Sebaliknya, asumsikan $src(G) = 2$. Berdasar (a) haruslah $rc(G) \leq 2$. Karena G bukan graf lengkap, maka haruslah $rc(G) = 2$.

c. Andaikan G bukan graf pohon. Maka G memiliki suatu lingkaran C : $v_1, v_2, ..., v_k, v_1$ dimana $k \geq 3$. $(m-1)$-*coloring* terhadap sisi-sisi G yang memberikan 1 untuk sisi v_1v_2 dan v_2v_3, $(m-2)$ buah warna berbeda dari himpunan warna $\{2, 3, ..., m-1\}$ untuk $m-2$ sisi tersisa di G adalah *rainbow coloring*. Jadi, $rc(G) \leq m-1$.

Selanjutnya, misalkan G adalah graf pohon dengan ukuran m. Asumsikan bahwa, $rc(G) \leq m-1$. Misalkan c adalah suatu *minimum rainbow coloring* di G. Maka terdapat sisi e dan f sehingga $c(e) = c(f)$. Asumsikan, tanpa mengurangi perumuman, bahwa $e = uv$ dan $f = xy$ dan G memiliki suatu *u-y path u,v,...,x,y*. Maka tidak terdapat *rainbow u-y path* di G. Ini kontradiksi dengan G adalah *rainbow coloring*. Jadi, haruslah G adalah graf pohon dengan ukuran m. □

Proposisi 2.2. *[2] Misalkan C_n adalah graf lingkaran dengan banyak titik n, dimana $n \geq 4$ maka $rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Bukti. Misalkan terdapat graf lingkaran C_n dengan $V(C_n) = v_1, v_2, ..., v_n, v_1$ dan $E(C_n) = \{v_iv_{i+1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_1v_n\}$ untuk setiap i di G dengan $1 \leq i \leq n$. Pandang dua kasus berikut.

Kasus 1. n adalah genap. Misalkan $n = 2k$ untuk bilangan bulat $k \geq 2$ maka $src(C_n) \geq rc(C_n) \geq diam(C_n) = k$. Karena pewarnaan sisi c_0 dari C_n yang didefinisikan sebagai berikut,

$$c_0(e_i) = \begin{cases} i & \text{untuk } 1 \leq i \leq k; \\ i-k & \text{untuk } k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

adalah *strong rainbow k-coloring*, maka jelas bahwa $rc(C_n) \leq src(C_n) \leq k$, maka haruslah $rc(C_n) = src(C_n) = k$.

Kasus 2. n adalah ganjil. Misalkan $n = 2k+1$ untuk bilangan bulat $k \geq 2$. Definisikan pewarnaan sisi c_1 dari C_n dengan

$$c_1(e_i) = \begin{cases} i & \text{untuk } 1 \leq i \leq k+1; \\ i-k-1 & \text{untuk } k+2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Karena c_1 adalah *strong rainbow* $(k+1)$-*coloring* dari C_n maka $rc(C_n) \leq src(C_n) \leq k+1$. Karena $rc(C_n) \geq diam(C_n) = k$ maka $rc(C_n) = k$ atau $rc(C_n) = k+1$. Klaim bahwa $rc(C_n) = k+1$. Asumsikan dengan kontradiksi bahwa $rc(C_n) = k$. Misalkan c' adalah suatu *rainbow k-coloring* dari C_n dan misalkan u dan v adalah dua titik *antipodal* dari C_n. Maka lintasan *u-v geodesic* di C_n adalah *rainbow path*, sementara $u-v$ *path* lainnya di C_n bukan *rainbow path* karena memiliki panjang $k+1$.

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $c'(v_{k+1}v_{k+2}) = k$. Pandang titik-titik v_1, v_{k+1}, dan v_{k+2}. Karena lintasan $v_1 - v_{k+1}$ *geodesic* $P : v_1, v_2, ..., v_{k+1}$ adalah *rainbow path* dan lintasan v_1-v_{k+2} *geodesic*, $Q : v_1, v_n, ..., v_{n-1}, v_{k+2}$ adalah *rainbow path*, maka beberapa sisi di P dan Q diwarnai dengan warna k. Karena $v_2 - v_{k+2}$

geodesic, $v_2, v_3, ..., v_{k+2}$ adalah *rainbow path* maka $c'(v_1v_2) = k$. Dengan cara yang sama, $v_n - v_{k+1}$ *geodesic*, $v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, ..., v_{k+1}$ sehingga $c'(v_nv_1) = k$ diperoleh $c'(v_1v_2) = c'(v_nv_1) = k$. Ini berarti, tidak terdapat *rainbow* $v_2 - v_n$ *path* di G. Ini kontradiksi dengan c' adalah suatu *rainbow k-coloring* dari C_n. Jadi, haruslah $rc(C_n) = src(C_n) = k + 1$. □

Salah satu contoh graf yang dibangun oleh graf lingkaran adalah graf roda. Untuk $n \geq 3$, graf roda W_n didefinisikan sebagai $C_n + K_1$, dimana satu titik baru dihubungkan ke semua titik di C_n. Jelas bahwa $W_3 \cong K_4$. Selanjutnya akan dicari *rainbow connection numbers* dari graf roda.

Proposisi 2.3. *[2] Rainbow connection number dari graf roda W_n untuk $n \geq 3$ adalah*

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1 & \textit{jika } n = 3; \\ 2 & \textit{jika } 4 \leq n \leq 6; \\ 3 & \textit{jika } n \geq 7. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan W_n terdiri dari lingkaran C_n dengan n titik $C_n : v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1} = v_1$ dan satu titik lain v terhubung dengan setiap titik di C_n. Karena $W_3 \cong K_4$, maka berdasarkan Proposisi 3.1, diperoleh $rc(W_3) = 1$. Untuk $4 \leq n \leq 6$, jelas bahwa graf roda W_n bukan graf lengkap dan karenanya $rc(W_n) \geq 2$. Karena 2-*coloring* $c : E(W_n) \to \{1, 2\}$ yang didefinisikan oleh

$$c(v_iv) = \begin{cases} 1, & \text{i ganjil;} \\ 2, & \text{i genap.} \end{cases}$$

dan

$$c(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ i ganjil;} \\ 2, \text{ i genap.} \end{cases}$$

adalah *rainbow coloring*, maka diperoleh bahwa $rc(W_n) = 2$ untuk $4 \leq n \leq 6$.

Misalkan $n \geq 7$. Karena 3-*coloring* $c : E(W_n) \to \{1, 2, 3\}$ didefinisikan oleh $c(v_iv) = 1$ jika i adalah bilangan ganjil, $c(v_iv) = 2$ jika i adalah bilangan genap dan $c(e) = 3$ untuk setiap $e \in E(C_n)$ adalah *rainbow coloring*, diperoleh $rc(W_n) \leq 3$. Karena W_n bukan graf lengkap, maka haruslah $rc(W_n) \geq 2$. Asumsikan bahwa $rc(W_n) = 2$. Misalkan c' adalah *rainbow* 2-*coloring* dari W_n. Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa $c'(v_1v) = 1$. Untuk setiap i dengan $4 \leq i \leq n-2, v_1, v, v_i$ adalah satu-satunya $v_1 - v_i$ *path* dengan panjang 2 di W_n, sehingga $c'(v_iv) = 2$ untuk $4 \leq i \leq n-2$. Karena $c'(v_4v) = 2$ maka $c'(v_nv) = 1$. Akibatnya $c'(v_3v) = 2$ sehingga $c'(v_{n-1}v) = 1$. Karena $c'(v_nv) = 1$ maka $c'(v_2v) = 2$. Akibatnya $c'(v_5v) = 2$ karena $c'(v_2v) = 2$ dan $c'(v_5v) = 2$, maka tidak terdapat lintasan $v_2 - v_5$ *rainbow* di W_n. Ini kontradiksi dengan pengandaian bahwa terdapat 2-*coloring* di W_n. Oleh karena itu, $rc(W_n) = 3$ untuk $n \geq 7$. □

Proposisi 2.4. *[2] Strong rainbow connection number dari graf W_n untuk $n \geq 3$ adalah $src(W_n) = \lceil n/3 \rceil$.*

Bukti. Misalkan W_n terdiri dari n-lingkaran $C_n : v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1} = v_1$ dan satu titik lain v terhubung ke setiap titik di C_n. Karena $W_3 \cong K_4$, berdasarkan Proposisi 2.1 diperoleh bahwa $src(W_3) = 1$. Untuk $4 \leq n \leq 6$, menurut Proposisi 2.3 diperoleh $rc(W_n) = 2$, sehingga berdasarkan Proposisi 2.1(b) diperoleh $src(W_n) = 2$. Oleh karena itu, jelas bahwa $src(W_n) = \lceil n/3 \rceil$ untuk $4 \leq n \leq 6$.

Asumsikan $n \geq 7$, maka terdapat suatu bilangan bulat k sehingga $3k-2 \leq n \leq 3k$. Akan ditunjukkan $src(W_n) \geq k$. Asumsikan, bahwa $src(W_n) \leq k-1$. Misalkan c adalah *strong rainbow (k-1)-coloring* dari W_n. Karena $d(v) = n > 3(k-1)$, maka terdapat $S \subseteq V(C_n)$ sedemikian sehingga $|S| = 4$ dan semua sisi di $\{uv : u \in S\}$ memiliki warna sama. Maka terdapat paling sedikit dua titik $u', u'' \in S$ sehingga $d_{C_n}(u', u'') \geq 3$ dan $d_{W_n}(u', u'') = 2$. Karena u', v, u'' adalah satu-satunya $u' - u''$ *geodesic* di W_n maka tidak terdapat lintasan *rainbow geodesic* $u' - u''$ di W_n, ini kontradiksi dengan c adalah *strong rainbow (k-1)-coloring* dari W_n. Jadi, haruslah $src(W_n) \geq k$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $src(W_n) \leq k$, dikonstruksikan suatu *strong rainbow k-coloring* $c : E(W_n) \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$ di W_n, yang didefinisikan sebagai berikut

$$c(e) = \begin{cases} 1 & \text{jika } e{=}v_i\ v_{i+1} \text{ dan } i \text{ adalah bilangan ganjil;} \\ 2 & \text{jika } e{=}v_i\ v_{i+1} \text{ dan } i \text{ adalah bilangan genap;} \\ \text{j+1} & \text{jika } e{=}v_i\ v \text{ jika } i \in \{3j+1, 3j+2, 3j+3\} \text{ untuk } 0 \leq j \leq k-1. \end{cases}$$

Oleh karena itu, $src(W_n){=}k{=}\lceil n/3 \rceil$ untuk $n \geq 7$. □

Teorema 2.5. *[2] Strong rainbow connection number dari graf bipartit lengkap* $K_{s,t}$ *untuk bilangan bulat* s *dan* t *dengan* $1 \leq s \leq t$ *adalah*

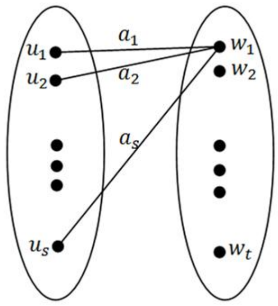
$$src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil.$$

Bukti. Untuk $s = 1$ maka $src(K_{1,t}) = \lceil \sqrt[1]{t} \rceil = t$. Karena $src(K_{1,t}) = t$, maka jelas bahwa $t = \lceil \sqrt[1]{t} \rceil$. Selanjutnya, asumsikan bahwa $s \geq 2$. Misalkan $\lceil \sqrt[s]{t} \rceil = k$, maka

$$1 \leq k-1 < \lceil \sqrt[s]{t} \rceil \leq k.$$

sehingga $(k-1)^s < t \leq k^s$ sehingga $(k-1)^s + 1 \leq t \leq k^s$. Akan ditunjukkan bahwa $src(K_{s,t}) \geq k$. Asumsikan sebaliknya bahwa $src(K_{s,t}) \leq k-1$. Maka terdapat *strong rainbow (k-1)-coloring* dari graf $(K_{s,t})$.

Misalkan U dan W adalah himpunan partisi dari graf $K_{s,t}$, dimana $|U| = s$ dan $|W| = t$. Andaikan $U = \{u_1, u_2, ..., u_s\}$. Diberikan suatu *strong rainbow (k-1)-coloring* c dari graf $K_{s,t}$. Untuk setiap titik $w \in W$, kita dapat mengasosiasikan suatu $code(w) = (a_1, a_2, ..., a_s)$, yang disebut **kode warna** dari w, dimana $a_i = c(u_i w)$ untuk $1 \leq i \leq s$. Ilustrasinya dapat dilihat pada Gambar 1. Karena $1 \leq a_i \leq k-1$ untuk setiap $i (1 \leq i \leq s)$, maka banyaknya kode warna berbeda dari titik-titik di W paling banyak $(k-1)^s$. Tetapi, karena $t > (k-1)^s$, maka setidaknya terdapat dua titik yang berbeda, yaitu w' dan w'' di W, sehingga $code(w') = code(w'')$. Karena $c(u_i w') = c(u_i w'')$ untuk semua $i (1 \leq i \leq s)$, dapat ditunjukkan bahwa $K_{s,t}$ tidak memuat *rainbow* $w' - w''$ *geodesic* di $K_{s,t}$, hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa c adalah suatu *strong rainbow (k-1)-coloring* pada $K_{s,t}$. Jadi haruslah, $src(K_{s,t}) \geq k$.



Gambar 1. Ilustrasi $K_{s,t}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $src(K_{s,t}) \leq k$. Pembuktian dilakukan dengan memberikan suatu *strong rainbow k-coloring* pada $K_{s,t}$. Misalkan $A = \{1, 2, 3, ..., k\}$ dan $B = \{1, 2, ..., k-1\}$. Himpunan A^s adalah hasil kali kartesian dari s himpunan A dan B^s adalah hasil kali kartesian dari s himpunan B. Jadi, $|A^s| = k^s$ dan $|B^s| = (k-1)^s$. Maka $|B^s| < t \leq |A^s|$. Misalkan $W = \{w_1, w_2, ..., w_t\}$, dimana titik-titik di W dilabeli dengan t anggota dari A^s sedemikian sehingga titik-titik $w_1, w_2, ..., w_{(k-1)^s}$ dilabeli dengan $(k-1)^s$ anggota di B^s. Untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq t$, tulis label w_i dengan

$$\mathbf{w}_i = (w_{i,1}, w_{i,2}, ..., w_{i,s}). \tag{2.1}$$

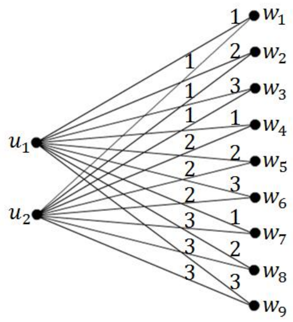
Untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq (k-1)^s$ diperoleh $1 \leq w_{i,j} \leq k-1$ untuk $1 \leq j \leq s$. Didefinisikan pewarnaan $c : E(K_{s,t}) \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$ dari sisi di $K_{s,t}$ dengan

$$c(w_i u_j) = w_{i,j} \quad \text{dimana} \quad 1 \leq i \leq t \quad \text{dan} \quad 1 \leq j \leq s.$$

Untuk $1 \leq i \leq t$, kode warna $code(w_i)$ dari w_i yang diberikan oleh pewarnaan c adalah w_i seperti dijelaskan pada persamaan (2.1) maka titik-titik berbeda di W memiliki kode warna berbeda.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa c adalah *strong rainbow k-coloring* dari $K_{s,t}$. Untuk $w_i \in W$ dan $u_j \in U$, jelas bahwa lintasan w_i-u_j adalah *rainbow geodesic*. Misalkan w_a dan w_b adalah dua titik di W. Karena titik-titik ini memiliki kode warna berbeda, maka terdapat suatu l dengan $1 \leq l \leq s$ sehingga $code(w_a)$ dan $code(w_b)$ memiliki koordinat ke-l yang berbeda. Maka $c(w_a u_l) \neq c(w_b u_l)$ dan w_a, u_l, w_b adalah *rainbow* $w_a - w_b$ *geodesic* di $K_{s,t}$. Misalkan terdapat titik u_p dan u_q di U, dimana $1 \leq p < q \leq s$. Karena terdapat suatu titik $w_i \in W$ dengan $1 \leq i \leq (k-1)^s$ sehingga $w_{i,p} \neq w_{i,q}$, dapat ditunjukkan bahwa u_p, w_i, u_q adalah suatu *rainbow* $u_p - u_q$ *geodesic* di $K_{s,t}$. Oleh karena itu, terbukti bahwa c adalah *strong rainbow k-coloring* dari $K_{s,t}$ dan $src(K_{s,t}) \leq k$. □

Berikut diberikan ilustrasi dari Teorema 2.5 untuk graf bipartit lengkap. Graf $K_{2,9}$ merupakan salah satu contoh graf bipartit lengkap, pada Gambar 2 terlihat bahwa $src(K_{2,9}) = 3$.



Gambar 2. $src(K_{2,9}) = 3$.

Teorema 2.6. *[2] Rainbow connection number dari graf $K_{s,t}$ untuk suatu bilangan bulat s dan t dengan $2 \leq s \leq t$ adalah*

$$rc(K_{s,t}) = min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 4\}.$$

Bukti. Perhatikan bahwa untuk $2 \leq s \leq t$, $\lceil \sqrt[s]{t} \rceil \geq 2$. Misalkan U dan W himpunan partisi dari graf $(K_{s,t})$, dimana $|U| = s$ dan $|W| = t$. Misalkan $U = \{u_1, u_2, ..., u_s\}$. Perhatikan tiga kasus berikut.

Kasus 1. $\lceil \sqrt[s]{t} \rceil = 2$.
Maka $s \leq t \leq 2^s$. Karena

$$2 \leq rc(K_{s,t}) \leq src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil = 2,$$

maka jelas bahwa $rc(K_{s,t}) = 2$.

Kasus 2. $\lceil \sqrt[s]{t} \rceil = 3$.
Maka $2^s + 1 \leq t \leq 3^s$. Karena

$$2 \leq rc(K_{s,t}) \leq src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil = 3,$$

maka jelas bahwa $rc(K_{s,t}) = 2$ atau $rc(K_{s,t}) = 3$. Klaim bahwa $rc(K_{s,t}) = 3$. Asumsikan sebaliknya bahwa terdapat suatu *rainbow* 2-*coloring* di $K_{s,t}$ sehingga terdapat suatu kode warna $code(w)$ yang diberikan untuk setiap titik $w \in W$ yang terdiri dari $(a_1, a_2, ..., a_s)$, dimana $a_i = c(u_i w) \in \{1, 2\}$ untuk $1 \leq i \leq s$. Karena $t > 2^s$, maka terdapat dua titik berbeda, yaitu w' dan w'' dari W sedemikian sehingga $code(w') = code(w'')$. Karena sisi lintasan $w' - w''$ dengan panjang 2 berwarna sama, maka tidak terdapat lintasan *rainbow* $w' - w''$ di $K_{s,t}$. Ini kontradiksi dengan asumsi bahwa terdapat *rainbow* 2-*coloring*. Jadi, haruslah $rc(K_{s,t}) = 3$.

Kasus 3. $\lceil \sqrt[s]{t} \rceil \geq 4$.
Maka $t \geq 3^s + 1$. Klaim bahwa $rc(K_{s,t}) = 4$. Akan ditunjukkan bahwa $rc(K_{s,t}) \geq 4$. Asumsikan sebaliknya bahwa terdapat suatu *rainbow* 3-*coloring* di $K_{s,t}$ sehingga terdapat suatu kode warna $code(w)$ yang diberikan untuk setiap titik $w \in W$ yang terdiri dari $(a_1, a_2, ..., a_s)$, dimana $a_i = c(u_i w) \in \{1, 2, 3\}$ untuk $1 \leq i \leq s$. Karena $t > 3^s$, maka terdapat dua titik berbeda, yaitu w' dan w'' dari W, sehingga $code(w') = code(w'')$. Karena sisi setiap lintasan $w' - w''$ di $K_{s,t}$ memiliki panjang

genap, maka lintasan *rainbow* $w' - w''$ yang mungkin hanyalah yang memiliki panjang 2. Tetapi, karena $code(w') = code(w'')$ maka warna sisi untuk setiap lintasan $w' - w''$ yang memiliki panjang 2 adalah sama, sehingga tidak terdapat lintasan *rainbow* $w' - w''$ di $K_{s,t}$. Ini kontradiksi dengan asumsi bahwa terdapat *rainbow* 3-*coloring*. Jadi, haruslah $rc(K_{s,t}) \geq 4$.

Untuk membuktikan bahwa $rc(K_{s,t}) \leq 4$, akan ditunjukkan bahwa terdapat *rainbow* 4-*coloring* di $K_{s,t}$. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$, $W' = \{w_1, w_2, ..., w_{3^s}\}$, dan $W'' = W - W'$. Kaitkan 3^s anggota yang berbeda dari A^s ke titik-titik di W', dan 3^s anggota yang sama/identik dikaitkan ke W'' dengan cara bahwa koordinat pertama adalah empat, dan koordinat-koordinat lainnya adalah tiga. Pengaitan kode tersebut bersesuaian dengan pewarnaan sisi $K_{s,t}$, dengan $c(w_i u_j) = k$ jika koordinat ke-j dari $code(w_i)$ adalah k. Klaim bahwa pewarnaan ini adalah suatu *rainbow* 4-*coloring* dari $K_{s,t}$. Misalkan $x, y \in W$ dibagi menjadi tiga kasus.

Kasus 1. $x, y \in W'$.
Karena $code(x) \neq code(y)$ maka terdapat i dengan $1 \leq i \leq s$ sehingga $code(x)$ dan $code(y)$ memiliki perbedaan pada koodinat ke-i. Maka lintasan x, u_1, y adalah suatu *rainbow* $x - y$ *path* dengan panjang 2 di $K_{s,t}$.

Kasus 2. $x \in W'$ dan $y \in W''$.
Misalkan koordinat yang pertama dari $code(x)$ adalah a, dimana $1 \leq a \leq 3$. Maka lintasan x, u_1, y adalah suatu *rainbow* $x - y$ *path* dengan panjang 2 di $K_{s,t}$ yang sisi-sisinya berwarna a dan 4.

Kasus 3. $x, y \in W''$.
Misalkan $z \in W'$ sehingga koordinat yang pertama dari $code(z)$ adalah 1 dan koordinat yang kedua dari $code(z)$ adalah 2, maka lintasan x, u_1, z, u_2, y adalah suatu *rainbow* $x - y$ *path* dengan panjang 4 di $K_{s,t}$ yang masing-masing sisinya berwarna 4,1,2, dan 3.

Misalkan $x, y \in U$. Maka $x = u_i$ dan $y = u_j$ dimana $1 \leq i < j \leq s$, sedemikian sehingga terdapat suatu titik $w \in W'$ yang mana koordinat ke-i dan ke-j adalah berbeda. Jadi, lintasan x, w, y adalah suatu *rainbow* $x - y$ *path* di $K_{s,t}$. Dalam kasus ini, pewarnaannya adalah *rainbow* 4-*coloring* dari $K_{s,t}$ sehingga $src(K_{s,t}) = 4$. □

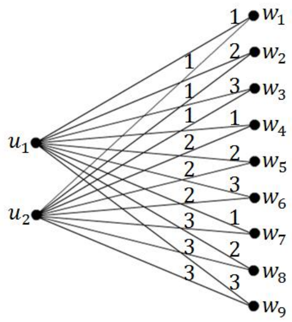
Berikut diberikan ilustrasi dari Teorema 2.6 untuk graf bipartit lengkap. Graf $K_{2,9}$ merupakan salah satu contoh graf bipartit lengkap, pada Gambar 3 terlihat bahwa $rc(K_{2,9}) = 3$.

3. Kesimpulan

Dalam paper ini telah dikaji kembali *rainbow connection number* ($rc(\cdot)$) dan *strong rainbow connection number* ($src(\cdot)$) dari graf terhubung tak-trivial, graf lingkaran, graf roda dan graf bipartit lengkap. Sebagaimana yang telah dikaji di [2], diperoleh hasil sebagai berikut.

Untuk graf terhubung tak-trivial G dengan ukuran m, diperoleh: (a) $rc(G) = src(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap, (b) $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$, dan (c) $rc(G) = m$ jika dan hanya jika G adalah graf pohon.

Untuk graf lingkaran C_n dengan $n \geq 4$, diperoleh $rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$,



Gambar 3. $rc(K_{2,9}) = 3$.

sedangkan untuk graf roda W_n dengan $n \geq 3$ diperoleh

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1 & \text{jika } n = 3; \\ 2 & \text{jika } 4 \leq n \leq 6; \\ 3 & \text{jika } n \geq 7, \end{cases}$$

dan $src(W_n) = \lceil n/3 \rceil$.

Kemudian *strong rainbow connection number* dari graf bipartit lengkap $K_{s,t}$ dengan $1 \leq s \leq t$ dimana $s, t \in \mathbb{N}$ adalah $src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$, sedangkan *rainbow connection number* dari graf bipartit lengkap $K_{s,t}$ dengan $2 \leq s \leq t$ dimana $s, t \in \mathbb{N}$ adalah $rc(K_{s,t}) = \min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 4\}$.

4. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Syafrizal Sy, Ibu Lyra Yulianti yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Bapak Muhafzan, Bapak Admi Nazra dan Bapak Mahdhivan Syafwan sehingga paper ini dapat dipublikasikan.

Daftar Pustaka

[1] Chartrand, G. dkk. 2005. *Introduction to Graph Theory*. McGraw-Hill, Boston.

[2] Chartrand, G. dkk. 2008. *Rainbow Connection in Graphs*. Math. Bohem. 133: 85-98.

[3] Reinhard, D. 2000. Graph Theory 2^{ed}, *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York.

[4] Li, X. dan Sun, Y. 2012. *Rainbow Connections of Graphs*. Springer, New York.