Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **4** Hal. 115 – 120
ISSN : 2303–2910

BEBERAPA STRUKTUR YANG TERKAIT DENGAN PRA A^*-ALJABAR

REZKI SUFINDRA, ZULAKMAL
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
rezkisufindra@gmail.com

Abstrak. Pada tulisan ini dikaji kembali tentang struktur yang terkait dengan Pra A^*-Aljabar $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^\sim)$ yang dinotasikan dengan $\bar{A}$ dan $\wedge, \vee$ dengan operasi biner dan operasi unery. Didefinisikan $x * y = x \wedge y$ untuk setiap $x, y \in A$ di Pra A^*-Aljabar $\bar{A}$. Selanjutnya akan dikaji keterkaitan Pra A^*-Aljabar terhadap *lattice* serta elemen terbesar dan elemen terkecil di $(A, \leq_*)$ pada $\bar{A}$ yang merupakan suatu Aljabar Boolean.

Kata Kunci: Pra A^*-Aljabar, *Lattice*, Aljabar Boolean.

1. Pendahuluan

Pertama kali konsep A^*-Aljabar $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^\sim, 0, 1, 2)$ dikemukakan oleh Koteswara Rao pada tahun 1994 yang merupakan suatu himpunan tak kosong A, dengan operasi-operasi biner, operasi tunggal, unsur identitas 0 dan 1 terhadap operasi $\vee$ dan $\wedge$ berturut-turut, dan unsur 2 yang memenuhi $2 \wedge x = 2, \forall x \in A$. Kemudian Koteswara Rao dan Venkateswara Rao mempelajari Aljabar Boolean dan A^*-Aljabar, serta metode penurunan A^*-Aljabar dari Aljabar Boolean dan sebaliknya.

Gagasan Pra A^*-Aljabar selanjutnya diperkenalkan pada tahun 2000 oleh Venkateswara Rao. Pra A^*-Aljabar adalah suatu sistem matematika $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^\sim)$ dimana A merupakan himpunan tak kosong dengan $\wedge$ (*meet*) dan $\vee$ (*join*) adalah operasi biner dan $(\cdot)^\sim$ adalah operasi tunggal, jika $\forall x, y, z \in A$ berlaku:

(1) $x^{\sim\sim} = x$
(2) $x \wedge x = x$
(3) $x \wedge y = y \wedge x$
(4) $(x \wedge y)^\sim = x^\sim \vee y^\sim$
(5) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
(6) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
(7) $x \wedge y = x \wedge (x^\sim \vee y)$.

Pada tulisan ini akan didefinisikan suatu operasi biner " $*$ " pada Pra A^*-Aljabar dengan $x * y = x \wedge y, \forall x, y \in A$. Tulisan ini bertujuan untuk menjelaskan bagaimana hubungan antara Pra A^*-Aljabar dengan *lattice*, dan Aljabar Boolean.

2. Tinjauan Beberapa Definisi dan Teorema Terkait

Lema 2.1. [5] *Misalkan $\bar{A}$ adalah Pra A^*-Aljabar yang punya unsur 1, maka berlaku :*

(1) Jika $x, y \in B(A)$ maka $x \wedge x^{\sim} \wedge y = x \wedge x^{\sim}$,
(2) $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ jika dan hanya jika $x, y \in B(A)$.

Bukti. Misal $\bar{A}$ adalah Pra A^* Aljabar.

(1) Jika $x, y \in B(A)$, akan ditunjukkan $x \wedge x^{\sim} \wedge y = x \wedge x^{\sim}$.
Ambil $x, y \in B(A)$ maka berdasarkan sifat Pra A^*-Aljabar berlaku $x \vee x^{\sim} = 1$, $x \wedge x^{\sim} = 0$ dan $y \vee y^{\sim} = 1, y \wedge y^{\sim} = 0$.
Perhatikan bahwa : $x \wedge x^{\sim} \wedge y = (x \wedge x^{\sim}) \wedge y = 0 \wedge y = y \wedge 0 = 0 = x \wedge x^{\sim}$.
(2) Akan ditunjukkan bahwa $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ jika dan hanya jika $x, y \in B(A)$.
$x \wedge (x \vee y) = (x \wedge x) \vee (x \wedge y) = (x \vee x) \wedge (x \vee (x^{\sim} \vee y)) = x \vee (x \wedge y) = x.$ □

Berikut ini akan dijelaskan definisi alternatif *lattice.*

Definisi 2.2. [4] *Sebuah* lattice *adalah sebuah Poset yang himpunan bagianya $\{x, y\}$ memiliki dua elemen yaitu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar. Dimana*

(1) $x \wedge y = \inf\{x, y\}$
(2) $x \vee y = \sup\{x, y\}$

Definisi 2.3. [5] *Misalkan $\bar{A}$ adalah suatu Pra A^*-Aljabar. Suatu relasi " $\leq_*$ " didefinisikan sebagai*

$$x \leq_* y \qquad jika \qquad x * y = x.$$

Teorema 2.4. [5] *Misalkan $\bar{A}$ adalah Pra A^*-Aljabar $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^{\sim})$ dan didefinisikan suatu operasi biner " $*$ " pada A yang memenuhi sifat $x * y = x \wedge y$, untuk setiap $x, y \in A$. Maka $(A, *)$ adalah Semi lattice.*

Bukti. Misalkan $\bar{A}$ adalah suatu Pra A^*-Aljabar. Akan dibuktikan bahwa $(A, *)$ adalah sebuah Semilattice, yaitu dengan menunjukkan bahwa relasi " $*$ " bersifat idempoten, komutatif, assosiatif.

[1.] Ambil sebarang $x \in A$. Akan ditunjukkan $x * x = x$.
Perhatikan bahwa :

$$x * x = x \wedge x = x$$

Jadi $x * x = x$, maka relasi " $*$ " adalah idempoten.

[2.] Ambil sebarang $x, y \in A$. Akan ditunjukkan $x * y = y * x$.
Perhatikan bahwa :

$$x * y = x \wedge y = y \wedge x = y * x.$$

Jadi $x * y = y * x.$, maka relasi " $*$ " adalah komutatif.

[3.] Ambil sebarang $x, y, z \in A$. Akan ditunjukkan $x * (y * z) = (x * y) * z$.
Perhatikan bahwa :

$$x * (y * z) = x * (y \wedge z) = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = (x * y) * z.$$

Jadi $x * (y * z) = (x * y) * z$, maka relasi " $*$ " adalah assosiatif.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 maka $(A, *)$ adalah Semilattice. □

Teorema 2.5. [5] *Misalkan $\bar{A}$ adalah Pra A^*-Aljabar yang memenuhi persamaan Semilattice. Maka untuk $x, y \in A$ berlaku bahwa $inf\{x, y\} = x \wedge y$ pada Semilattice $(A, *)$.*

Bukti. Diketahui bahwa $x \wedge y$ adalah batas bawah dari $\{x, y\}$.
Misalkan m adalah batas bawah dari $\{x, y\}$ maka

$$m \leq_* x \Leftrightarrow m * x = m \qquad dan \qquad m \leq_* y \Leftrightarrow m * y = m$$

Perhatikan bahwa $m * (x \wedge y) = m$, sehingga $m \leq_* x \wedge y$.

Oleh karena itu, $x \wedge y$ merupakan batas bawah terbesar dari $\{x, y\}$. Dengan kata lain, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$. □

3. Pembahasan

Pada bab ini akan diberikan beberapa struktur yang terkait dengan Pra A^*-Aljabar. Pada bagian ini didefinisikan $x * y = x \wedge y$ dimana untuk setiap $x, y \in A$ di Pra A^*-Aljabar $\bar{A}$.

Teorema 3.1. [5] *Misalkan $\bar{A}$ adalah Pra A^*-Aljabar yang memuat unsur 1. Untuk setiap $x, y \in B(A)$ berlaku sup $\{x, y\} = x \vee y$.*

Bukti. Jika $x, y \in B(A)$ berlaku Lema 2.1 bahwa $x \wedge (x \vee y) = x$ dan $y \wedge (y \vee x) = y$ maka mengakibatkan $x * (x \vee y) = x$ dan $y * (y \vee x) = y$.

Berdasarkan Definisi 2.3 akibatnya, $x \leq_* (x \vee y)$ dan $y \leq_* (y \vee x)$ artinya $x \vee y$ merupakan batas atas dari $\{x, y\}$.

Misalkan k adalah batas atas $\{x, y\}$ dimana $x \leq_* k, y \leq_* k$. Selanjutnya

$$x * k = x \Rightarrow x \wedge k = x \qquad dan \qquad y * k = y \Rightarrow y \wedge k = y.$$

Perhatikan bahwa

$$(x \vee y) * k = k * (x \vee y) = k \wedge (x \vee y) = (k \wedge x) \vee (k \wedge y) = (x \wedge k) \vee (y \wedge k) = x \vee y.$$

Oleh karena itu $x \vee y \leq_* k$ merupakan sup $\{x, y\} = x \vee y$. □

Teorema 3.2. [5] *Jika $\bar{A}$ adalah Pra A^*-Aljabar yang punya unsur 1 dan $x \wedge (x \vee y) = x$ untuk semua $x, y \in A$ maka setiap $(A, \leq_*)$ adalah* lattice.

Bukti. Pada Teorema 2.5 untuk setiap $x, y \in A$ berlaku bahwa $inf\{x, y\} = x \wedge y$.

Jika $x \wedge (x \vee y) = x$ untuk setiap $x, y \in A$ maka berlaku Lema 2.1, diperoleh $x, y \in B(A)$. Berdasarkan Teorema 3.1 diperoleh bahwa Sup $\{x, y\} = x \vee y$ untuk setiap $x, y \in B(A)$.

Oleh karena itu $(A, \leq_*)$ adalah *lattice* berdasarkan Definisi 2.2. □

Teorema 3.3. [5] *Misalkan* $\bar{A}$ *adalah Pra* A^**-Aljabar maka*

(1) $x \wedge (x * y) = x \wedge y$
(2) $(x * y) \wedge x = x * y$

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.4 berlaku bahwa suatu operasi biner " * " pada Pra A^*-Aljabar memenuhi sifat $x * y = x \wedge y$.

Ambil sebarang $x, y \in A$. Akan dibuktikan $x \wedge (x * y) = x \wedge y$.

$$x \wedge (x * y) = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y.$$

Ambil sebarang $x, y \in A$. Akan dibuktikan $(x * y) \wedge x = x * y$.

$$(x * y) \wedge x = (x \wedge y) \wedge x = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y = x * y.$$ □

Teorema 3.4. [5] *Jika* $\bar{A}$ *adalah Pra* A^**-Aljabar* $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^\sim)$*, maka kondisi-kondisi dibawah ini ekivalen :*

(1) $\bar{A}$ *adalah Aljabar Boolean.*
(2) $x \leq_* x \vee y,\ \forall x, y \in A.$
(3) $y \leq_* y \vee x,\ \forall x, y \in A.$
(4) $x \vee y$ *adalah batas atas dari* $\{x, y\}$ *di* $(A, \leq_*), \forall x, y \in A.$
(5) $x \vee y$ *adalah supremum dari* $\{x, y\}$ *di* $(A, \leq_*), \forall x, y \in A.$
(6) $x \vee x^\sim$ *adalah elemen terbesar di* $(A, \leq_*), \forall x, y \in A.$

Bukti.
(1) $\Rightarrow$ **(2)**
Misalkan $\bar{A}$ adalah Aljabar Boolean. Akan dibuktikan $x \leq_* x \vee y$.

$$x * (x \vee y) = x \wedge (x \vee y) = x.$$

Jadi $x \leq_* x \vee y$.
(2) $\Rightarrow$ **(3)**
Misalkan $x \leq_* x \vee y$ untuk setiap $x, y \in A$ maka $x * (x \vee y) = x$. Oleh karena itu $x \wedge (x \vee y) = x$. Akan dibuktikan $y \leq_* y \vee x$.
Karena $x * (x \vee y) = x$, maka dengan memisalkan $x = y$, maka

$$y * (y \vee x) = y \wedge (y \vee x) = y.$$

Jadi $y \leq_* y \vee x$.
(3) $\Rightarrow$ **(4)**
Misalkan bahwa $y \leq_* y \vee x \Rightarrow y * (x \vee y) = y$. Oleh karena itu $y \wedge (x \vee y) = y$.
Karena $y \leq_* y \vee x$ maka $y \vee x$ adalah batas atas dari y. Sehingga

$$x * (x \vee y) = x \leq (x \vee y) = x.$$

Jadi $x \leq_* x \vee y \Rightarrow (x \vee y)$ adalah batas atas dari x. $x \vee y$ merupakan batas atas dari $\{x, y\}$.

(4) $\Rightarrow$ (5)
Misalkan $x \vee y$ adalah batas atas dari $\{x, y\}$. Selanjutnya akan dibuktikan $x \vee y = \sup\ \{x, y\}$.
Misalkan z adalah batas atas dari $\{x, y\}$, maka $x \leq_* z,\ y \leq_* z$.
Akibatnya $x * z = x, y * z = y$. Sehingga $x \wedge z = x, y \wedge z = y$.
Jadi

$$(x \vee y) * z = z * (x \vee y) = z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y) = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = x \vee y.$$

Oleh karena itu $(x \vee y) \leq_* z$. Sehingga $\sup\{x, y\} = x \vee y$.

(5) $\Rightarrow$ (6)
Misalkan $\sup\{x, y\} = x \vee y$ maka $x, y \in A$. Sekarang tunjukkan

$$\sup\{x \vee x^{\sim}, y\} = x \vee x^{\sim} \vee y = (x \vee x^{\sim}) \vee y = 1 \vee y = 1 = x \vee x^{\sim}.$$

Maka $y \leq_* (x \vee x^{\sim})$. Oleh karena itu, $x \vee x^{\sim}$ adalah elemen terbesar di $(A, \leq_*)$.

(6) $\Rightarrow$ (1)
Misalkan $x \vee x^{\sim}$ merupakan elemen terbesar di $\bar{A}$ maka
$y \leq_* (x \vee x^{\sim})$ mengakibatkan $y * (x \vee x^{\sim}) = y$ Berdasarkan Teorema 2.4 akibatnya $y \wedge (x \vee x^{\sim}) = y$. Jadi

$$y \vee (y \wedge x) = [(x \vee x^{\sim}) \wedge y] \vee (y \wedge x) = [(x \vee x^{\sim}) \vee x] \wedge y = (x \vee x^{\sim}) \wedge y = y$$

Oleh karena itu $y \vee (x \wedge y) = y$. Sehingga $\bar{A}$ adalah Aljabar Boolean. □

Teorema 3.5. [5] *Misalkan $\bar{A}$ adalah Pra A^*-Aljabar $x \wedge x^{\sim}$ merupakan elemen terkecil di $(A, \leq_*)$ untuk setiap $x \in A$ maka $\bar{A}$ adalah Aljabar Boolean.*

Bukti. Misalkan $x \wedge x^{\sim}$ adalah elemen terkecil di $(A, \leq_*)$ untuk setiap $x \in A$, maka $x \wedge x^{\sim} \leq_* y$ mengakibatkan $(x \wedge x^{\sim}) * y = x \wedge x^{\sim}$. Berdasarkan Teorema 2.4 akibatnya $(x \wedge x^{\sim}) \wedge y = x \wedge x^{\sim}$. Akan dibuktikan

$$x \wedge (x \vee y) = [x \vee (x \wedge x^{\sim})] \wedge (x \vee y) = x \vee [(x \wedge x^{\sim}) \wedge y] = x \vee (x \wedge x^{\sim}) = x$$

Jadi dapat disimpulkan $x \wedge (x \vee y) = x$. Sehingga $\bar{A}$ adalah Aljabar Boolean. □

4. Kesimpulan

Misalkan $\bar{A}$ adalah Pra A^*-Aljabar $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^{\sim})$ dan didefinisikan suatu operasi biner " $*$ " pada $\bar{A}$. Kemudian didefinisikan sebuah relasi " $\leq_*$ " pada $\bar{A}$ dengan $x \leq_* y$ jika dan hanya jika $x * y = x$. Kemudian diperoleh hasil bahwa sistem $(\wedge, \vee, (\cdot)^{\sim}, \leq_*)$ suatu *lattice*.

Selanjutnya, terkait dengan Aljabar Boolean. Jika $\bar{A}$ adalah suatu Pra A^*-Aljabar $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^{\sim})$ dan $x \vee x^{\sim}$ elemen terbesar atau $x \wedge x^{\sim}$ merupakan elemen terkecil di $(A, \leq_*)$ maka diperoleh bahwa $\bar{A}$ adalah suatu Aljabar Boolean.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, Ibu Monika Rianti Helmi, M.Si, Bapak Narwen, M.Si dan Bapak Budi Rudianto, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Birkhoff, G., (1948). *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Colloquium Publishers, New York.
[2] Munir, R., *Matematika Diskrit*, Edisi Ketiga, Penerbit Informatika Bandung.
[3] Manes, E. G., (1993). ADA and the Equational Theory of If-Then-Else, Algebra Universalis, **30**: 373 – 339
[4] Rao, J. V. dkk. 2009. Pre A^*-Algebra as a Poset. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, Vol **2**(4): 073 – 080
[5] Rao, J. V. dan Satyanarayana. (2010). Semilattice Structure on Pre A^*-Algebra. *Asian Journal of Scientific Research*, Vol. **3**(4)