SPEKTRUM GRAF BINTANG S_n DAN GRAF LENGKAP K_n UNTUK $n \geq 2$

SUTRA MELCY SELVIA, NARWEN, ZULAKMAL

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
sutramelcy@gmail.com*

Abstrak. Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong titik dan E adalah himpunan sisi pada graf G . Spektrum pada graf dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen dan multiplisitas suatu matriks yang dipresentasikan dari suatu graf. Dalam tulisan ini akan dicari spektrum graf bintang S_n dan graf lengkap K_n dengan mempresentasikan graf tersebut ke dalam matriks ketetanggaan, matriks Laplace, matriks signless Laplace, matriks Laplace dinormalisasi dan matriks ketetanggaan Seidel.

Kata Kunci: Matriks ketetanggaan, matriks Laplace, matriks signless Laplace, matriks Laplace dinormalisasi, matriks ketetanggaan Seidel, spektrum graf

1. Pendahuluan

Perkembangan teori graf banyak didukung oleh berbagai cabang ilmu matematika lain misalkan saja bidang aljabar. Kedua cabang ilmu tersebut, dapat dihubungkan dengan mengkaji suatu graf melalui sifat-sifat aljabar yaitu dari representasi graf dalam suatu matriks. Teori spektra graf merupakan penghubung yang mempertemukan teori graf dan aljabar linier. Pada teori spektra graf membahas hubungan polinomial karakteristik, nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar linier serta representasinya dalam graf yaitu melalui perhitungan dari matriks ketetanggaan, matriks Laplace, matriks signless Laplace, matriks Laplace dinormalisasi dan matriks ketetanggaan seidel dalam graf.

Salah satu topik pada teori spektra graf yang akan dibahas adalah mengenai spektrum graf. Pada materi tentang spektrum graf ini, didasarkan pada penentuan nilai eigen dan multiplisitas masing-masing matriks suatu graf sehingga dapat diperoleh spektrum dari suatu graf tertentu.

2. Representasi Graf Dalam Matriks

Graf tidak hanya dipresentasikan dalam bentuk gambar tetapi dapat juga dipresentasikan dalam bentuk matriks. Berikut ini adalah lima matriks yang dapat digunakan untuk menentukan spektrum suatu graf sederhana dan tidak berarah.

Definisi 2.1. [5] Misalkan G adalah suatu graf sederhana dan tidak berarah dengan n simpul dan D merupakan matriks diagonal dengan entri-entrinya merupakan

derajat simpul pada graf G .

- Matriks ketetanggaan untuk G adalah matriks simetri $A = [a_{ij}]$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga;} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (2.1)$$

- Matriks Laplace untuk G adalah matriks $L = D - A = [l_{ij}]$, dengan

$$l_{ij} = \begin{cases} d(v_i), & \text{jika } i = j, \\ -1, & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga;} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (2.2)$$

- Matriks signless Laplace untuk G adalah matriks $Q = D + A = [q_{ij}]$, dengan

$$q_{ij} = \begin{cases} d(v_i), & \text{jika } i = j, \\ 1, & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga;} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (2.3)$$

- Matriks Laplace dinormalisasi untuk G adalah $N = [n_{ij}]$, dengan

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j, \\ \frac{-1}{\sqrt{d_i d_j}}, & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga;} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (2.4)$$

- Matriks ketetanggaan Seidel untuk G adalah $S = J - I - 2A = [s_{ij}]$, dimana matriks J adalah matriks persegi dengan semua entrinya adalah satu), dengan

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = j, \\ -1, & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga;} \\ 1, & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ tidak bertetangga.} \end{cases} \quad (2.5)$$

3. Persamaan Polinomial Karakteristik dan Spektrum Graf

Persamaan polinomial karakteristik suatu matriks A adalah sebagai berikut

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (3.1)$$

Skalar-skalar yang memenuhi persamaan 3.1 adalah nilai-nilai eigen A . Bentuk umum dari persamaan karakteristik tersebut adalah

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n. \quad (3.2)$$

dengan $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah koefisien-koefisien polinomial karakteristik.

Definisi 3.1. [3] *Spektrum dari sebuah graf G adalah matriks dari nilai-nilai eigen yang bersamaan dengan banyaknya multiplisitas dari nilai eigen tersebut, jika nilai eigen dari suatu matriks tersebut adalah $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n-1}$ dan banyak multiplisitasnya adalah $m(\lambda_0), m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_{n-1})$ maka spektrum dari suatu graf G dapat ditulis*

$$\text{Spektrum}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

4. Spektrum Graf Bintang S_n dan Graf Lengkap K_n untuk n bilangan Bulat dan $n \geq 2$

(1) Graf Bintang.

(a) Matriks Ketetanggaan

Matriks ketetanggaan dengan dua simpul sebagai berikut:

$$A(S_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka persamaan polinomial karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\lambda I_1 - A(S_1)) \\ &= \det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^2 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Maka diperoleh akar-akar persamaan polinomial karakteristik adalah

$$\lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

Berdasarkan Definisi 3.1 didapatkan spektrum graf bintang dengan dua simpul untuk matriks ketetanggaan sebagai berikut:

$$Spektrum(S_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tabel 1. Nilai eigen dan multiplisitas matriks ketetanggaan untuk graf bintang S_n

Banyak Simpul	Persamaan Karakteristik	Nilai Eigen	Multiplisitas
2	$(\lambda^2 - 1) = 0$	1 -1	1 1
3	$\lambda(\lambda^2 - 2) = 0$	0 $\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$	1 1 1
4	$\lambda^2(\lambda^2 - 3) = 0$	0 0 $\sqrt{3}$ $-\sqrt{3}$	2 1 1
5	$\lambda^3(\lambda^2 - 4) = 0$	0 0 0 $\sqrt{4}$ $-\sqrt{4}$	3 1 1
6	$\lambda^4(\lambda^2 - 5) = 0$	0 0 0 0 $\sqrt{5}$ $-\sqrt{5}$	4 1 1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\lambda^{(n-2)}(\lambda^2 - (n-1)) = 0$	0 $\dots$ 0 $\sqrt{(n-1)}$ $-\sqrt{(n-1)}$	(n-2) 1 1

Berdasarkan Tabel 1 didapatkan spektrum untuk graf bintang dengan n simpul untuk matriks ketetanggaan sebagai berikut:

$$Spektrum(S_n) = \begin{pmatrix} \sqrt{(n-1)} & 0 & -\sqrt{(n-1)} \\ 1 & n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Matriks Laplace.

Berdasarkan Tabel 2 maka didapatkan spektrum graf bintang dengan n simpul untuk matriks Laplace

$$Spektrum(S_n) = \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 1 & (n-2) & 1 \end{pmatrix}$$

Tabel 2. Nilai eigen dan multiplisitas matriks Laplace untuk graf bintang S_n

Banyak Simpul	Persamaan Karakteristik	Nilai Eigen	Multiplisitas
2	$\lambda(\lambda - 2) = 0$	0 2	1 1
3	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$	0 1 3	1 1 1
4	$\lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0$	0 1 1 4	1 2 1
5	$\lambda(\lambda - 1)^3(\lambda - 5) = 0$	0 1 1 1 5	1 3 1
6	$\lambda(\lambda - 1)^4(\lambda - 6) = 0$	0 1 1 1 1 6	1 4 1
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\lambda(\lambda - 1)^{(n-2)}(\lambda - n) = 0$	0 1 1 ⋯ 1 n	1 (n - 2) 1

(c) Matriks signless Laplace.

Tabel 3. Nilai eigen dan multiplisitas matriks signless Laplace untuk graf bintang S_n

Banyak Simpul	Persamaan karakteristik	Nilai Eigen	Multiplisitas
2	$\lambda(\lambda - 2) = 0$	0 2	1 1
3	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$	0 1 3	1 1 1
4	$\lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0$	0 1 1 4	1 2 1
5	$\lambda(\lambda - 1)^3(\lambda - 5) = 0$	0 1 1 1 5	1 3 1
6	$\lambda(\lambda - 1)^4(\lambda - 6) = 0$	0 1 1 1 1 6	1 4 1
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\lambda(\lambda - 1)^{(n-2)}(\lambda - n) = 0$	0 1 1 ⋯ 1 n	1 (n - 2) 1

Berdasarkan Tabel 3 maka didapatkan spektrum graf bintang dengan n simpul untuk matriks signless Laplace sebagai berikut:

$$Spektrum(S_n) = \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 1 & (n - 2) & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Matriks Laplace dinormalisasi.

Tabel 4. Nilai eigen dan multiplisitas matriks Laplace dinormalisasi untuk graf bintang S_n

Banyak Simpul	Persamaan Karakteristik	Nilai Eigen	Multiplisitas
2	$\lambda(\lambda - 2) = 0$	0 2	1 1
3	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$	0 1 2	1 1 1
4	$\lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$	0 1 1 2	1 2 1
5	$\lambda(\lambda - 1)^3(\lambda - 2) = 0$	0 1 1 1 2	1 3 1
6	$\lambda(\lambda - 1)^4(\lambda - 2) = 0$	0 1 1 1 1 2	1 4 1
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\lambda(\lambda - 1)^{(n-2)}(\lambda - 2) = 0$	0 1 1 ⋯ 1 2	1 (n - 2) 1

Berdasarkan Tabel 4 maka didapatkan spektrum untuk graf bintang dengan n simpul untuk matriks Laplace dinormalisasi sebagai berikut:

$$Spektrum(S_n) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & (n - 2) & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Matriks Ketetanggaan Seidel.

Berdasarkan Tabel 5 didapatkan spektrum graf bintang dengan n simpul untuk matriks ketetanggaan Seidel sebagai berikut:

$$Spektrum(S_n) = \begin{pmatrix} n - 1 & -1 \\ 1 & n - 1 \end{pmatrix}$$

Tabel 5. Nilai Eigen dan Multiplisitas Matriks Ketetanggaan Seidel untuk graf Bintang S_n

Banyak Simpul	Persamaan karakteristik	Nilai Eigen	Multiplisitas
2	$(\lambda^2 - 1) = 0$	-1 1	1 1
3	$(\lambda + 1)^2 (\lambda - 2) = 0$	-1 -1 2	2 1
4	$(\lambda + 1)^3 (\lambda - 3) = 0$	-1 -1 -1 3	3 1
5	$(\lambda + 1)^4 (\lambda - 4) = 0$	-1 -1 -1 -1 4	4 1
6	$(\lambda + 1)^5 (\lambda - 5) = 0$	-1 -1 -1 -1 -1 5	5 1
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$(\lambda + 1)^{(n-1)} (\lambda - (n - 1)) = 0$	-1 -1 ⋯ -1 (n - 1)	(n - 1) 1

(2) Graf Lengkap K_n

- (a) Matriks Ketetanggaan. Matriks ketetanggaan dengan dua simpul sebagai berikut:

$$A(K_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka persamaan polinomial karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_2 - A(K_2)) &= 0 \\ \det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \lambda^2 - 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh akar-akar persamaan karakteristiknya

$$\lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

Berdasarkan Definisi 3.1 didapatkan spektrum graf lengkap dengan dua simpul untuk matriks ketetanggaan sebagai berikut :

$$\text{Spektrum}(K_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

 Tabel 6. Nilai eigen dan multiplisitas matriks ketetanggaan untuk graf lengkap K_n

Banyak Simpul	Persamaan karakteristik	Nilai Eigen	Multiplisitas
2	$(\lambda^2 - 1) = 0$	-1 1	1 1
3	$(\lambda + 1)^2 (\lambda - 2) = 0$	-1 -1 2	2 1
4	$(\lambda + 1)^3 (\lambda - 3) = 0$	-1 -1 -1 3	3 1
5	$(\lambda + 1)^4 (\lambda - 4) = 0$	-1 -1 -1 -1 4	4 1
6	$(\lambda + 1)^5 (\lambda - 5) = 0$	-1 -1 -1 -1 -1 5	5 1
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$(\lambda + 1)^{(n-1)} (\lambda - (n - 1)) = 0$	-1 -1 ⋯ -1 (n - 1)	(n - 1) 1

Dari Tabel 6 maka didapatkan spektrum graf lengkap dengan n simpul untuk matriks ketetangaan sebagai berikut:

$$Spectrum(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

(b) Matriks Laplace.

Tabel 7. Nilai eigen dan multiplisitas matriks Laplace untuk graf lengkap K_n

Banyak Simpul	Persamaan karakteristik	Nilai Eigen	Multiplisitas
2	$\lambda(\lambda-2)=0$	0 2	1 1
3	$\lambda(\lambda-3)^2=0$	0 3 3	1 2
4	$\lambda(\lambda-4)^3=0$	0 4 4 4	1 3
5	$\lambda(\lambda-5)^4=0$	0 5 5 5 5	1 4
6	$\lambda(\lambda-6)^5=0$	0 6 6 6 6 6	1 5
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\lambda(\lambda-n)^{(n-1)}=0$	0 n n ⋯ n	1 (n-1)

Dari Tabel 7 didapatkan spektrum graf lengkap dengan n simpul untuk matriks Laplace sebagai berikut:

$$Spektrum(K_n) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ (n-1) & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Matriks Signless Laplace.

Tabel 8. Nilai eigen dan multiplisitas matriks signless Laplace untuk graf lengkap K_n

Banyak Simpul	Persamaan karakteristik	Nilai Eigen	Multiplisitas
2	$\lambda(\lambda-2)=0$	0 2	1 1
3	$(\lambda-1)^2(\lambda+4)=0$	1 1 4	2 1
4	$(\lambda-2)^3(\lambda+6)=0$	2 2 2 6	3 1
5	$(\lambda-3)^4(\lambda+8)=0$	3 3 3 3 8	4 1
6	$(\lambda-4)^5(\lambda+10)=0$	4 4 4 4 4 10	5 1
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$(\lambda-(n-2))^{(n-1)}(\lambda-2(n-1))=0$	(n-2) ⋯ (n-2) 2(n-1)	(n-1) 1

Berdasarkan Tabel 8 didapatkan spektrum graf lengkap dengan n simpul untuk matriks signless Laplace sebagai berikut:

$$Spektrum(K_n) = \begin{pmatrix} 2(n-1) & (n-2) \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

(d) Matriks Laplace Dinormalisasi.

Berdasarkan Tabel 9 maka didapatkan spektrum untuk graf lengkap K_n dengan n simpul sebagai berikut:

$$Spektrum(K_n) = \begin{pmatrix} \frac{n}{(n-1)} & 0 \\ (n-1) & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Matriks Ketetangaan Seidel.

Tabel 9. Nilai eigen dan multiplisitas matriks Laplace dinormalisasi untuk graf lengkap K_n

Banyak Simpul	Persamaan karakteristik	Nilai Eigen	Multiplisitas
2	$\lambda(\lambda - 2) = 0$	0 2	1 1
3	$\lambda(\lambda - \frac{3}{2})^2 = 0$	0 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	1 2
4	$\lambda(\lambda - \frac{4}{3})^3 = 0$	0 $\frac{4}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{4}{3}$	1 3
5	$\lambda(\lambda - \frac{5}{4})^4 = 0$	0 $\frac{5}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{5}{4}$	1 4
6	$\lambda(\lambda - \frac{6}{5})^5 = 0$	0 $\frac{6}{5}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{6}{5}$	1 5
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\lambda(\lambda - \frac{n}{(n-1)})^{(n-1)} = 0$	0 $\frac{n}{(n-1)}$ ⋯ $\frac{n}{(n-1)}$	1 (n-1)

 Tabel 10. Nilai eigen dan multiplisitas matriks ketetanggaan seidel untuk graf lengkap K_n

Banyak Simpul	Persamaan karakteristik	Nilai Eigen	Multiplisitas
2	$(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$	-1 1	1 1
3	$(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0$	-2 1 1	1 2
4	$(\lambda + 3)(\lambda - 1)^3 = 0$	-3 1 1 1	1 3
5	$(\lambda + 4)(\lambda - 1)^4 = 0$	-4 1 1 1 1	1 4
6	$(\lambda + 5)(\lambda - 1)^5 = 0$	-5 1 1 1 1 1	1 5
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$(\lambda + (n-1))(\lambda - 1)^{(n-1)} = 0$	-(n-1) 1 1 ⋯ 1	1 (n-1)

Dari Tabel 10 didapatkan spektrum untuk graf lengkap dengan n simpul untuk matriks ketetanggaan Seidel sebagai berikut:

$$\text{Spectrum}(K_n) = \begin{pmatrix} -(n-1) & 1 \\ 1 & (n-1) \end{pmatrix}$$

5. Kesimpulan

Setelah dilakukan perhitungan untuk menentukan spektrum graf bintang S_n dan graf lengkap K_n dengan menggunakan matriks ketetanggaan, matriks Laplace, matriks signless Laplace, matriks Laplace dinormalisasi dan matriks ketetanggaan seidel maka diperoleh bentuk umum spektrum dari graf bintang S_n dan graf lengkap K_n untuk n bilangan bulat dan $n \geq 2$ sebagai berikut:

 Tabel 11. Spektrum Graf Bintang S_n

Matriks	Nilai eigen	Multiplisitas
Ketetanggaan	$\sqrt{(n-1)}$ 0 $-\sqrt{(n-1)}$	1 (n-2) 1
Laplace	n 1 0	1 (n-2) 1
signless Laplace	n 1 0	1 (n-2) 1
Laplace dinormalisasi	2 1 0	1 (n-2) 1
ketetanggaan Seidel	(n-1) -1	1 (n-1)

Daftar Pustaka

- [1] Anton, Howard dan Rorres, Chris. 1998. *Aljabar Linier Elementer (Versi Aplikasi)*. Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta
- [2] Biggs, N. 1993. *Algebraic Graph Theory*. Second Edition. Cambridge University Press, New York

Tabel 12. Spektrum Graf Lengkap K_n

Matriks	Nilai eigen	Multiplisitas
Ketetanggaan	$(n-1) \quad -1$	$1 \quad (n-1)$
Laplace	$n \quad 0$	$(n-1) \quad 1$
signless Laplace	$2(n-1) \quad (n-2)$	$1 \quad (n-1)$
Laplace dinormalisasi	$\frac{n}{(n-1)} \quad 0$	$(n-1) \quad 1$
ketetanggaan Seidel	$-(n-1) \quad 1$	$1 \quad (n-1)$

- [3] Heamers, Wiliam H dan Brouwer, Andries E. 2012. *Spectra Of Graphs*. Springer, New York
- [4] Munir, R. 2003. *Matemtika Diskrit. Edisi Kedua*. Informatika, Bandung
- [5] Seidy Essam El, Hussein Salah El Din dan Elkher Atef Abo. 2015. Spectra of Some Simple Graphs. *Journal Paper of Mathematical Theory and Modeling*. 5(2): 115 – 121