

METODE JALUR KRITIS DAN PENDEKATAN PROGRAM LINIER PADA MASALAH MANAJEMEN PROYEK

RISNA JULITA, MAHDHIVAN SYAFWAN, BUDI RUDIANTO

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
Risnajulita27@gmail.com*

Abstrak. Salah satu permasalahan dalam proyek adalah menyelesaikan masalah manajemen proyek secara optimal. Masalah manajemen proyek tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode jalur kritis dan pendekatan program linier. Pada metode jalur kritis, penyelesaian masalah manajemen proyek untuk menentukan jalur kritis diidentifikasi dengan mencari variabel *slack*. Dan pada pendekatan program linier, jalur kritis bisa dicari menggunakan solver program linier pada Microsoft Excel 2010. Dari jalur kritis ini dapat ditentukan durasi penyelesaian proyek pada kondisi normal (tidak ada penundaan pada setiap kegiatan proyek). Kedua metode tersebut juga dapat digunakan untuk mempercepat penyelesaian proyek yang disebut *crashing*. *Crashing* pada metode jalur kritis dicari dengan melakukan analisis marjinal pada data *time-cost trade-off* dan pada pendekatan program linier dicari dengan menggunakan solver program linier Microsoft Excel 2010. Kedua metode dalam menyelesaikan masalah program linier tersebut menghasilkan nilai optimum yang sama.

Kata Kunci: Program Linier, Metode Jalur Kritis, *Slack*, *time-cost trade-off*, *Crashing*

1. Pendahuluan

Dalam dunia kerja saat ini sangat dibutuhkan sekali koordinasi di berbagai bidang organisasi untuk menyelesaikan suatu proyek dengan baik. Proyek adalah rangkaian tugas atau kegiatan yang berhubungan dengan pencapaian beberapa tujuan yang direncanakan, biasanya tujuannya adalah tunggal dan tidak berulang [5].

Sebelum mengerjakan proyek, terdapat beberapa tahap pengelolaan proyek, yaitu tahap perencanaan, tahap penjadwalan dan tahap pengkoordinasian. Tahap yang paling menentukan untuk berhasil atau tidaknya suatu proyek yaitu tahap perencanaan dan tahap penjadwalan [2]. Tahap perencanaan merupakan dasar untuk proyek bisa berjalan dengan baik. Jika sebuah proyek tidak direncanakan dengan baik, maka waktu penyelesaian suatu proyek tidak dapat diperkirakan dengan tepat karena penyelesaian sebuah proyek itu bervariasi. Adapun penjadwalan adalah tahap ketergantungan dari berbagai aktivitas yang membangun proyek secara keseluruhan dan disusun secara sistematis dengan sumber daya yang digunakan secara efektif dan efisien.

Untuk menyelesaikan masalah manajemen proyek digunakan dua metode penjadwalan yaitu metode jalur kritis [*critical path method* (CPM)] dan pendekatan

program linier (*linier programming*) [2]. Metode jalur kritis pada dasarnya merupakan metode penjadwalan yang berorientasi pada waktu. Tujuan dari metode jalur kritis adalah untuk membangun hubungan antara waktu dan biaya proyek dengan mengurangi target waktu dan mempertimbangkan biaya operasional [4].

Program linier sendiri merupakan metode matematika yang banyak digunakan dalam menyelesaikan masalah optimasi linier di berbagai bidang. Permasalahan yang akan dikaji adalah bagaimana penggunaan metode jalur kritis dan pendekatan program linier pada masalah manajemen suatu proyek sehingga dapat ditentukan lamanya waktu penyelesaian proyek tersebut dengan biaya penyelesaian yang minimal dengan mengeksplorasi kembali pembahasan pada referensi [3] dan menerapkannya pada kasus proyek yang ada pada referensi [4].

2. Manajemen Proyek dengan Metode Jalur Kritis

Suatu jaringan yang digunakan untuk merepresentasikan pengerjaan proyek dinamakan jaringan proyek (*project network*). Suatu jaringan proyek terdiri dari simpul (ditampilkan sebagai lingkaran kecil atau persegi panjang) dan busur (ditampilkan sebagai panah) untuk menghubungkan simpul-simpul yang berbeda. Suatu *path* pada jaringan proyek adalah rute yang melalui busur-busur dari simpul "mulai" sampai simpul "selesai". *Panjang* dari jalur adalah total dari (perkiraan) durasi kegiatan-kegiatan pada jalur tersebut [3]. Jelas bahwa (perkiraan) durasi keseluruhan proyek sama dengan panjang dari jalur terpanjang yang melalui jaringan proyek. Jalur terpanjang tersebut dinamakan jalur kritis (*critical path*) [3].

Pada penjadwalan setiap unit kegiatan perlu ditentukan kapan waktu mulai dan waktu selesai jika tidak terjadi penundaan. Waktu mulai dan waktu selesai dari setiap kegiatan jika tidak terjadi penundaan dalam proyek disebut *Earliest Start Time* (ES) dan *Earliest Finish Time* (EF) dari kegiatan tersebut [3].

Hubungan antara ES dan EF dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$EF = ES + (\text{perkiraan}) \text{ durasi kegiatan.}$$

Untuk menentukan ES, digunakan aturan berikut [3]:

- (i) Jika suatu kegiatan hanya mempunyai satu kegiatan pendahulu, maka

$$ES \text{ untuk kegiatan tersebut} = EF \text{ dari kegiatan pendahulu.}$$

- (ii) Jika suatu kegiatan mempunyai lebih dari satu kegiatan pendahulu, maka

$$ES \text{ untuk kegiatan tersebut} = EF \text{ maksimum dari kegiatan-kegiatan pendahulunya.}$$

Selanjutnya juga dikenal *Latest Start Time* (LS), yaitu waktu paling akhir setiap kegiatan dapat dimulai tanpa adanya penundaan pada penyelesaian proyek (sehingga simpul "selesai" masih dicapai pada waktu selesai yang paling awal). Kemudian *Latest Start Time* (LF) memiliki definisi yang bersesuaian dengan penyelesaian kegiatan tersebut.

Hubungan antara LS dan LF adalah

$$LS = LF - (\text{perkiraan}) \text{ durasi kegiatan.}$$

Untuk menentukan LF digunakan aturan berikut [3]:

- (i) Jika suatu kegiatan mempunyai satu kegiatan lanjutan, maka

$$LF \text{ untuk kegiatan tersebut} = LS \text{ dari kegiatan lanjutannya.}$$

- (ii) Jika suatu kegiatan mempunyai lebih dari satu kegiatan lanjutan, maka

$$LF \text{ untuk kegiatan tersebut} = LS \text{ minimum dari kegiatan-kegiatan lanjutannya.}$$

Slack untuk suatu kegiatan adalah selisih antara waktu selesai paling akhir dan waktu selesai paling awal dari kegiatan tersebut, atau dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$slack = LF - EF.$$

Karena $LF - EF = LS - ES$, maka *slack* juga dapat dihitung dengan

$$slack = LS - ES.$$

Setiap kegiatan yang mempunyai nilai *slack* nol ($LF - EF = 0$), maka kegiatan tersebut berada pada jalur kritis, artinya setiap penundaan yang terjadi di sepanjang jalur ini akan menyebabkan penundaan pada penyelesaian proyek secara keseluruhan [3].

Crashing suatu kegiatan mengacu pada langkah-langkah khusus (yang mengeluarkan biaya) untuk mengurangi durasi penyelesaian dari kegiatan tersebut. *Crashing* proyek mengacu pada *crashing* sejumlah kegiatan untuk mengurangi durasi penyelesaian proyek di bawah waktu normal.

Metode CPM untuk *time-cost trade-off* adalah metode CPM yang berkaitan dengan menentukan berapa banyak (jika ada) *crash* untuk masing-masing kegiatan yang dapat dilakukan dalam rangka mengurangi durasi proyek ke waktu yang diinginkan [3].

3. Penerapan Metode Jalur Kritis dan Pendekatan Program Linier Pada Masalah Manajemen Proyek

Untuk penerapan digunakan suatu proyek konstruksi yang bernama Reliable Co. Perusahaan konstruksi Reliable Co tersebut baru saja memenangkan tender \$6,500,000 untuk pembangunan apartemen baru. Pembangunan apartemen tersebut mesti diselesaikan kurang dari dua tahun. Untuk itu, dibuatlah kontrak sebagai berikut:

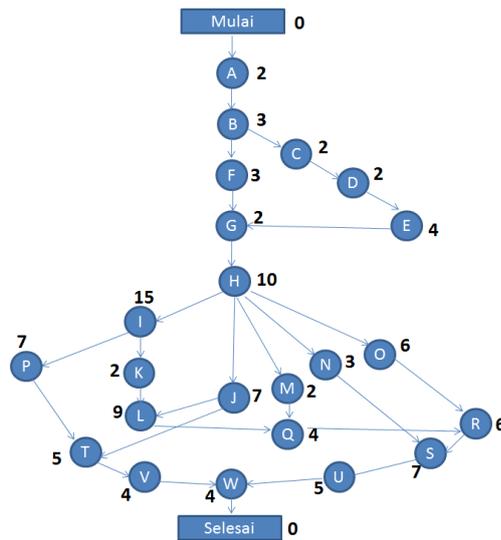
- Jika pembangunan apartemen tersebut tidak selesai dalam 80 minggu, maka Reliable Co akan dikenakan denda sebesar \$1,980,000.
- Jika pembangunan apartemen tersebut selesai lebih cepat yaitu dalam waktu 50 minggu, maka Reliable Co akan diberikan bonus sebesar \$990,000.

Pada Tabel 1 diberikan daftar kegiatan dari proyek konstruksi Reliable Co tersebut. Dalam hal ini, data pada kolom ke-3 dan ke-4 diambil dari referensi [3].

Tabel 1. Daftar Kegiatan Proyek Konstruksi Reliable Co

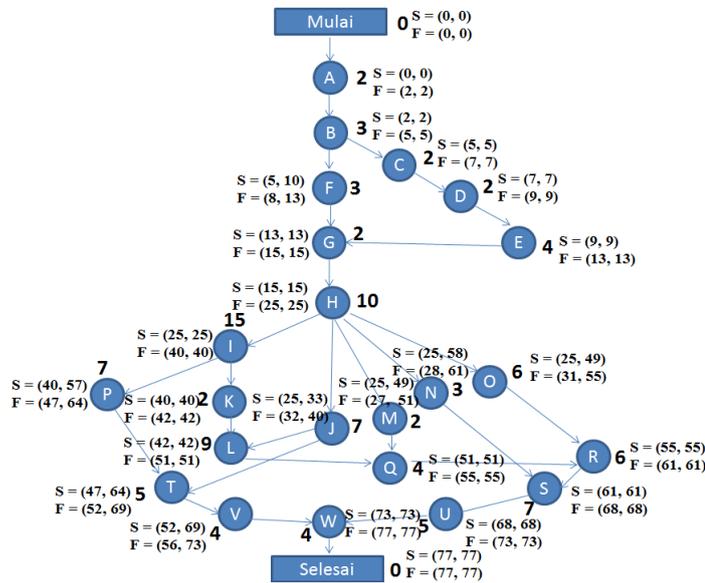
Kegiatan	Kegiatan Pendahulu	Perkiraan (Durasi)
A	-	2 Minggu
B	A	3 Minggu
C	B	2 Minggu
D	C	2 Minggu
E	D	4 Minggu
F	B	3 Minggu
G	E,F	2 Minggu
H	G	10 Minggu
I	H	15 Minggu
J	H	7 Minggu
K	I	2 Minggu
L	J,K	9 Minggu
M	H	2 Minggu
N	H	3 Minggu
O	H	6 Minggu
P	I	7 Minggu
Q	L,M	4 Minggu
R	O,Q	6 Minggu
S	N,R	7 Minggu
T	J,P	5 Minggu
U	S	5 Minggu
V	T	4 Minggu
W	U,V	4 Minggu
Total		114 Minggu

Pada jaringan proyek berskala kecil seperti Gambar 1, penentuan jalur kritis dengan mendata seluruh jalur yang mungkin dan kemudian mencari jalur yang terpanjang masih mudah untuk dilakukan. Namun, untuk jaringan proyek berskala besar, cara seperti ini tentunya menjadi tidak efisien. Sebagai alternatif, digunakan metode jalur kritis yang memberikan prosedur yang sistematis sehingga perhitungannya dapat dibuat lebih efisien (melalui program). Berikut dijelaskan langkah-langkahnya dengan perhitungan manual yang diterapkan pada proyek konstruksi Reliable Co.



Gambar 1. Jaringan Proyek Konstruksi Reliable Co

A. Penjadwalan setiap unit kegiatan



Gambar 2. Keseluruhan nilai ES dan LS serta EF dan LF dari Proyek Konstruksi Reliable Co

- (1) Menentukan nilai ES (*earliest start time*) dan EF (*earliest finish time*),
- (2) Menentukan nilai LS (*latest start time*) dan LF (*latest finish time*).

B. Identifikasi *slack* pada penjadwalan

Untuk mengidentifikasi *slack* pada jaringan proyek, digunakan gabungan antara $S = (ES, LS)$ dan $F = (EF, LF)$ yang digambarkan dalam diagram jaringan proyek pada Gambar 2.

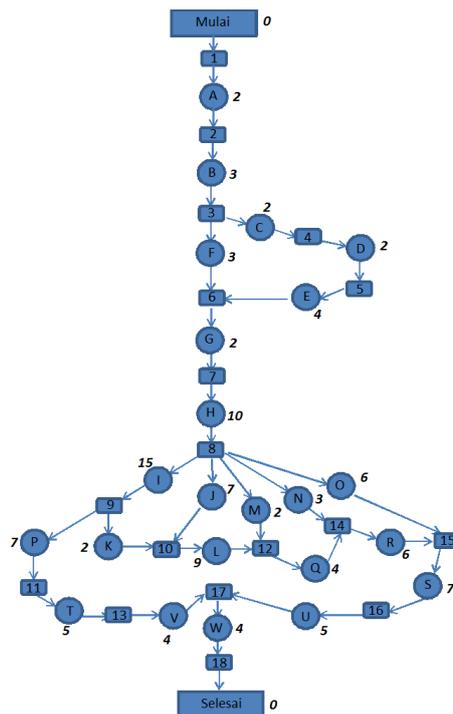
Untuk mencari kegiatan yang berada pada jalur kritis dan yang tidak berada pada jalur kritis, maka dicari nilai *slack* yang bisa dilihat pada Tabel 2 (suatu kegiatan berada pada jalur kritis jika nilai *slack*-nya nol, dan sebaliknya).

Dari tabel tersebut diperoleh jalur kritis sebagai berikut:

$Mulai \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow U \rightarrow W \rightarrow Selesai$, dengan panjang 77 minggu (dengan total biaya sebesar \$5,120,000).

Tabel 2. *Slack* pada Proyek Konstruksi Reliable Co

Kegiatan	<i>Slack</i> (LF-EF)	Berada pada Jalur Kritis ?
A	2 - 2 = 0	ya
B	5 - 5 = 0	ya
C	7 - 7 = 0	ya
D	9 - 9 = 0	ya
E	13 - 13 = 0	ya
F	13 - 8 = 5	tidak
G	15 - 15 = 0	ya
H	25 - 25 = 0	ya
I	40 - 40 = 0	ya
J	40 - 32 = 8	tidak
K	42 - 42 = 0	ya
L	51 - 51 = 0	ya
M	51 - 27 = 24	tidak
N	61 - 28 = 33	tidak
O	55 - 31 = 24	tidak
P	64 - 47 = 17	tidak
Q	55 - 55 = 0	ya
R	61 - 61 = 0	ya
S	68 - 68 = 0	ya
T	69 - 52 = 17	tidak
U	73 - 73 = 0	ya
V	73 - 56 = 17	tidak
W	77 - 77 = 0	ya



Gambar 3. Jaringan Proyek Konstruksi Reliable Co

Untuk menentukan jalur kritis dengan menggunakan pendekatan program linier, bentuk terlebih dahulu simpul 'imajiner' di setiap busur pada jaringan proyek. Misalkan simpul tersebut dikodekan dengan angka (lihat Gambar 3 pada jaringan proyek konstruksi Reliable Co).

Teknik program linier untuk menentukan jalur kritis adalah dengan melihat kegiatan yang masuk ke simpul imajiner dan keluar dari simpul imajiner. Misalkan

pada suatu jaringan proyek terdapat m simpul imajiner, dimana simpul 1 dan m berturut-turut menyatakan simpul imajiner awal (setelah kegiatan 'mulai') dan simpul imajiner akhir (sebelum kegiatan 'akhir').

Fungsi tujuan dari program linier untuk masalah ini adalah:

$$\max Z = \sum_{i=1}^n T_i Y_i,$$

dimana:

- Z = durasi penyelesaian proyek pada jalur kritis,
- T_i = waktu normal untuk kegiatan i ,
- Y_i = variabel keputusan untuk kegiatan i apakah berada pada jalur kritis atau tidak (1 = "ya" dan 0 = "tidak"),
- n = banyak kegiatan.

Kendalanya diklasifikasikan dalam tiga kategori :

- untuk kegiatan yang memasuki simpul m :

$$\sum_{i=1}^p Y_i = 1, \quad p < n$$
- untuk kegiatan yang keluar dari simpul 1:

$$\sum_{i=1}^q Y_i = 1, \quad q < n$$
- untuk kegiatan yang masuk ke dan keluar dari simpul $2, 3, \dots, m-1$:

$$+ \sum_{i=1}^r Y_i - \sum_{i=1}^s Y_i = 0, \quad r, s < n,$$

dimana tanda '+' dan '-' berturut-turut digunakan untuk kegiatan-kegiatan yang masuk ke dan keluar dari simpul $2, 3, \dots, m-1$. Dengan menggunakan contoh kasus pada masalah proyek konstruksi Reliable Co, diformulasikan model program linier sebagai berikut:

Fungsi tujuan:

$$\text{maks } Z = 2Y_A + 3Y_B + 2Y_C + 2Y_D + 4Y_E + 3Y_F + 2Y_G + 10Y_H + 15Y_I + 7Y_J + 2Y_K + 9Y_L + 2Y_M + 3Y_N + 6Y_O + 7Y_P + 4Y_Q + 6Y_R + 7Y_S + 5Y_U + 5Y_T + 4Y_V + 4Y_W.$$

Perhatikan bahwa pada kasus ini, terdapat 18 simpul imajiner (lihat lagi Gambar 3). Jadi fungsi-fungsi kendalanya adalah:

- (1) Untuk kegiatan yang keluar dari simpul 1:

$$\text{simpul 1: } Y_A = 1.$$

- (2) Untuk kegiatan yang masuk ke dan keluar dari simpul $2, 3, \dots, 17$:

simpul 2: $Y_A - Y_B = 0,$	simpul 10: $Y_J + Y_K - Y_L = 0,$
simpul 3: $Y_B - Y_C - Y_F = 0,$	simpul 11: $Y_P - Y_T = 0,$
simpul 4: $Y_C - Y_D = 0,$	simpul 12: $Y_M + Y_L - Y_Q = 0,$
simpul 5: $Y_D - Y_E = 0,$	simpul 13: $Y_T - Y_V = 0,$
simpul 6: $Y_F + Y_E - Y_G = 0,$	simpul 14: $Y_N + Y_Q - Y_R = 0,$
simpul 7: $Y_G - Y_H = 0,$	simpul 15: $Y_O + Y_R - Y_S = 0,$
simpul 8: $Y_H - Y_I - Y_J - Y_M - Y_N - Y_O = 0,$	simpul 16: $Y_S - Y_U = 0,$
simpul 9: $Y_I - Y_P - Y_K = 0,$	simpul 17: $Y_V + Y_U - Y_W = 0.$

Tabel 3. Hasil Perhitungan Jalur Kritis pada Proyek Konstruksi Reliable Co dengan menggunakan Solver Program Linier pada Microsoft Excel 2010

Kegiatan	Kegiatan Pendahulu	Waktu Normal (Ti)	Nilai Fi	Nilai Z	Berada pada Jalur Kritis ?
A		2	1	2	Ya
B	A	3	1	3	Ya
C	B	2	1	2	Ya
D	C	2	1	2	Ya
E	D	4	1	4	Ya
F	B	3	0	0	Tidak
G	E, F	2	1	2	Ya
H	G	10	1	10	Ya
I	H	15	1	15	Ya
J	H	7	0	0	Tidak
K	I	2	1	2	Ya
L	J, K	9	1	9	Ya
M	H	2	0	0	Tidak
N	H	3	0	0	Tidak
O	H	6	0	0	Tidak
P	I	7	0	0	Tidak
Q	L, M	4	1	4	Ya
R	O, Q	6	1	6	Ya
S	N, R	7	1	7	Ya
T	J, P	5	0	0	Tidak
U	S	5	1	5	Ya
V	T	4	0	0	Tidak
W	U, V	4	1	4	Ya
Waktu Penyelesaian proyek		114		77	

(3) Untuk kegiatan yang memasuki simpul 18:

$$\text{simpul 18: } Y_W = 1$$

Masalah program linier di atas diselesaikan dengan menggunakan solver program linier pada Microsoft Excel 2010 ditampilkan pada Tabel 3. Dari tabel tersebut diperoleh jalur kritis:

Mulai → A → B → C → D → E → G → H → I → K → L → Q → R → S → U → W → *Selesai*,

dengan durasi penyelesaian proyek pada kondisi normal (tanpa penundaan) adalah selama 77 minggu.

Untuk mempercepat penyelesaian proyek pembangunan apartemen sampai pada waktu yang diinginkan, perusahaan konstruksi Reliable Co dapat melakukan *crashing* pada setiap kegiatan, yang tentu saja memerlukan biaya tambahan (atau disebut biaya *crash*). Pada Tabel 4 (kolom 3 dan 5) diberikan data waktu dan biaya *crash* yang dirancang oleh perusahaan Reliable Co di setiap kegiatan proyek.

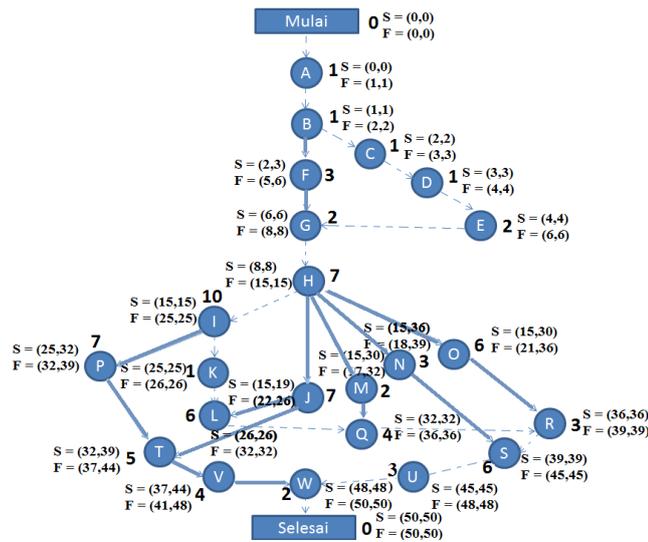
Untuk menentukan kegiatan mana saja yang akan di-*crash* dan seberapa besar waktu reduksinya, maka dicari terlebih dahulu waktu reduksi maksimum, dan tambahan biaya dengan adanya *crash* per minggu (diistilahkan dengan "biaya *crash* per minggu") untuk setiap kegiatan dengan menggunakan rumus:

$$\begin{aligned} \text{waktu reduksi maksimum} &= \text{waktu normal} - \text{waktu } \textit{crash}, \\ \text{biaya } \textit{crash} \text{ per minggu} &= \frac{\text{biaya } \textit{crash} - \text{biaya normal}}{\text{waktu reduksi maksimum}}. \end{aligned}$$

Pada Tabel 4 kolom 6 dan 7 ditampilkan hasil perhitungan waktu reduksi maksimum dan biaya *crash* per minggu untuk setiap kegiatan.

Tabel 4. Data *Time-Cost Trade-Off* dari Proyek Konstruksi Reliable Co

Kegiatan	Waktu Normal	Waktu Crash	Biaya Normal	Biaya Crash	Waktu Reduksi Maksimum	Biaya Crash Per minggu
A	2 minggu	1 minggu	\$20,000	\$30,000	1 minggu	\$10,000
B	3 minggu	1 minggu	\$60,000	\$100,000	2 minggu	\$20,000
C	2 minggu	1 minggu	\$30,000	\$40,000	1 minggu	\$10,000
D	2 minggu	1 minggu	\$20,000	\$30,000	1 minggu	\$10,000
E	4 minggu	2 minggu	\$100,000	\$150,000	2 minggu	\$25,000
F	3 minggu	2 minggu	\$150,000	\$180,000	1 minggu	\$30,000
G	2 minggu	1 minggu	\$200,000	\$300,000	1 minggu	\$100,000
H	10 minggu	7 minggu	\$500,000	\$620,000	3 minggu	\$40,000
I	15 minggu	10 minggu	\$650,000	\$850,000	5 minggu	\$40,000
J	7 minggu	5 minggu	\$250,000	\$300,000	2 minggu	\$25,000
K	2 minggu	1 minggu	\$20,000	\$25,000	1 minggu	\$5,000
L	9 minggu	6 minggu	\$300,000	\$420,000	3 minggu	\$40,000
M	2 minggu	1 minggu	\$20,000	\$25,000	1 minggu	\$5,000
N	3 minggu	2 minggu	\$30,000	\$40,000	1 minggu	\$10,000
O	6 minggu	4 minggu	\$120,000	\$150,000	2 minggu	\$15,000
P	7 minggu	4 minggu	\$450,000	\$570,000	3 minggu	\$40,000
Q	4 minggu	2 minggu	\$350,000	\$500,000	2 minggu	\$75,000
R	6 minggu	3 minggu	\$550,000	\$760,000	3 minggu	\$70,000
S	7 minggu	5 minggu	\$450,000	\$600,000	2 minggu	\$75,000
T	5 minggu	3 minggu	\$350,000	\$450,000	2 minggu	\$50,000
U	5 minggu	3 minggu	\$250,000	\$320,000	2 minggu	\$35,000
V	4 minggu	2 minggu	\$150,000	\$220,000	2 minggu	\$35,000
W	4 minggu	2 minggu	\$100,000	\$150,000	2 minggu	\$25,000



Gambar 4. Jaringan Proyek Konstruksi Reliable Co setelah dilakukan *Crashing*

Jadi, proyek konstruksi Reliable Co dengan melakukan *crash* dapat diselesaikan selama 50 minggu dengan total biaya adalah biaya normal (\$5.120.000) + biaya *crash* (\$970.000) = \$6.090.000. Diagram jaringan proyek konstruksi setelah di-*crash* ditunjukkan oleh Gambar 3.3.6, dimana panah dengan garis putus-putus menunjukkan jalur kritis pada jaringan proyek.

Penentuan kegiatan *crashing* pada jalur kritis suatu proyek dapat lebih mudah dilakukan dengan menggunakan program linier.

Variabel keputusan sebagai berikut:

x_j = reduksi pada durasi kegiatan j yang akan di-*crash*, untuk $j = A, B, \dots, W$.

$y_{selesai}$ = durasi proyek, yaitu waktu saat simpul "selesai" pada jaringan proyek

tercapai.

y_j = waktu mulai kegiatan ke- j , untuk $j = B, C, \dots, W$, jika diberikan nilai x_A, x_B, \dots, x_W .

Waktu untuk memulai setiap kegiatan (termasuk "selesai") langsung berhubungan dengan waktu mulai dan durasi dari setiap kegiatan pendahulunya sebagaimana yang dirumuskan sebagai berikut:

Untuk setiap kegiatan (B, C, \dots, W , "Selesai") dan setiap kegiatan pendahulunya, berlaku:

$$\text{waktu mulai kegiatan} \geq (\text{waktu mulai} + \text{durasi}) \text{ dari kegiatan pendahulunya.}$$

Dengan menggunakan waktu normal pada Tabel 4, durasi dari setiap kegiatan dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Durasi dari kegiatan } j = \text{waktu normal kegiatan } j - x_j.$$

Dengan demikian, model program linier secara lengkap untuk masalah *crashing* proyek adalah sebagai berikut:

Fungsi Tujuan:

$$\text{Min } Z = 10000x_A + 20000x_B + \dots + 25000x_W,$$

dengan kendala:

- (1) Kendala reduksi maksimum:

Dengan menggunakan kolom ke-6 pada Tabel 4,

$$x_A \leq 1, x_B \leq 2, \dots, x_W \leq 2.$$

- (2) Kendala non-negatif:

$$x_A \geq 0, x_B \geq 0, \dots, x_W \geq 0.$$

$$y_B \geq 0, y_C \geq 0, \dots, y_W \geq 0, y_{\text{Selesai}} \geq 0.$$

- (3) Kendala waktu mulai:

Terdapat dua tipe yaitu kendala dengan satu kegiatan pendahulu dan kendala dengan lebih dari satu kegiatan pendahulu.

Kendala dengan satu kegiatan pendahulu:

$$\begin{array}{ll} y_B \geq y_A + 2 - x_A & y_K \geq y_I + 15 - x_I \\ y_C \geq y_B + 3 - x_B & y_M \geq y_H + 10 - x_H \\ y_D \geq y_C + 2 - x_C & y_N \geq y_H + 10 - x_H \\ y_E \geq y_D + 2 - x_D & y_O \geq y_H + 10 - x_H \\ y_F \geq y_B + 3 - x_B & y_P \geq y_I + 15 - x_I \\ y_G \geq y_F + 3 - x_F & y_U \geq y_S + 7 - x_S \\ y_H \geq y_G + 2 - x_G & y_V \geq y_T + 5 - x_t \\ y_I \geq y_H + 10 - x_H & y_{\text{Selesai}} \geq y_W + 4 - x_W. \\ y_J \geq y_H + 10 - x_H & \end{array}$$

Kendala dengan lebih dari satu kegiatan pendahulu:

$$\begin{array}{ll} y_J \geq y_K + 2 - x_K & y_S \geq y_N + 3 - x_N \\ y_J \geq y_J + 7 - x_J & y_S \geq y_R + 6 - x_R \\ y_Q \geq y_M + 2 - x_M & y_T \geq y_P + 7 - x_P \\ y_Q \geq y_L + 9 - x_L & y_T \geq y_J + 7 - x_J \end{array}$$

Tabel 5. Hasil Perhitungan Solusi Optimal dari Proyek Konstruksi Reliable Co dengan Menggunakan Solver Program Linier pada Microsoft Excel 2010

Penjadwalan Waktu-Biaya Proyek Konstruksi Reliable Co											
Kegiatan	Waktu		Biaya		Waktu Reduksi Maksimum	Biaya Crash per Minggu	Waktu Mulai	Waktu Reduksi	Waktu Selesai	Biaya Kegiatan yang di-Crash	
	Normal	Crash	Normal	Crash							
A	2	1	\$ 20,000	\$ 30,000	1	\$ 10,000	0	1	1	\$ 10,000	
B	3	1	\$ 60,000	\$ 100,000	2	\$ 20,000	1	2	2	\$ 40,000	
C	2	1	\$ 30,000	\$ 40,000	1	\$ 10,000	2	1	3	\$ 10,000	
D	2	1	\$ 20,000	\$ 30,000	1	\$ 10,000	3	1	4	\$ 10,000	
E	4	2	\$ 100,000	\$ 150,000	2	\$ 25,000	4	2	6	\$ 50,000	
F	3	2	\$ 150,000	\$ 180,000	1	\$ 30,000	3	0	6	\$ -	
G	2	1	\$ 200,000	\$ 300,000	1	\$ 100,000	6	0	8	\$ -	
H	10	7	\$ 500,000	\$ 620,000	3	\$ 40,000	8	3	15	\$ 120,000	
I	15	10	\$ 650,000	\$ 850,000	5	\$ 40,000	15	5	25	\$ 200,000	
J	7	5	\$ 250,000	\$ 300,000	2	\$ 25,000	19	0	26	\$ -	
K	2	1	\$ 20,000	\$ 25,000	1	\$ 5,000	25	1	26	\$ 5,000	
L	9	6	\$ 300,000	\$ 420,000	3	\$ 40,000	26	3	32	\$ 120,000	
M	2	1	\$ 20,000	\$ 25,000	1	\$ 5,000	15	0	17	\$ -	
N	3	2	\$ 30,000	\$ 40,000	1	\$ 10,000	36	0	39	\$ -	
O	6	4	\$ 120,000	\$ 150,000	2	\$ 15,000	30	0	36	\$ -	
P	7	4	\$ 450,000	\$ 570,000	3	\$ 40,000	25	0	32	\$ -	
Q	4	2	\$ 350,000	\$ 500,000	2	\$ 75,000	32	0	36	\$ -	
R	6	3	\$ 550,000	\$ 760,000	3	\$ 70,000	36	3	39	\$ 210,000	
S	7	5	\$ 450,000	\$ 600,000	2	\$ 75,000	39	1	45	\$ 75,000	
T	5	3	\$ 350,000	\$ 450,000	2	\$ 50,000	32	0	37	\$ -	
U	5	3	\$ 250,000	\$ 320,000	2	\$ 35,000	45	2	48	\$ 70,000	
V	4	2	\$ 150,000	\$ 220,000	2	\$ 35,000	37	0	41	\$ -	
W	4	2	\$ 100,000	\$ 150,000	2	\$ 25,000	48	2	50	\$ 50,000	
Total			\$ 5,120,000	\$ 6,830,000						\$ 970,000	
									Waktu Maks		
								Waktu Proyek Selesai	50	50	
								Biaya Total	\$ 6,090,000		

$$\begin{aligned}
 y_R &\geq y_O + 6 - x_O & y_W &\geq y_U + 5 - x_U \\
 y_R &\geq y_Q + 4 - x_Q & y_W &\geq y_V + 4 - x_V.
 \end{aligned}$$

(4) Kendala durasi proyek:

$$y_{Selesai} \geq 50.$$

Penyelesaian model program linier pada formulasi di atas dapat dicari dengan menggunakan solver program linier pada Microsoft Excel 2010 (dalam hal ini digunakan metode simpleks) diberikan pada Tabel 3.3.8, dimana solusi optimalnya ditunjukkan pada kolom ke-*J*, yaitu:

$$x_A = 1, x_B = 2, x_C = 1, x_D = 1, x_E = 2, x_H = 3, x_I = 5, x_L = 3, x_R = 3, x_S = 1, x_U = 2, x_W = 2.$$

Dari solusi tersebut diperoleh bahwa biaya total adalah biaya normal + biaya crash = \$5,120,000 + \$970,000 = \$6,090,000. Biaya total tersebut masih lebih kecil sebesar \$410,000 dari harga tender yang diberikan, yaitu \$6,500,000. Karena perusahaan dapat menyelesaikan proyek lebih cepat, yaitu selama 50 minggu, maka sesuai dengan kontrak, perusahaan mendapatkan bonus sebesar \$990,000.

Jadi total keuntungan yang diperoleh oleh perusahaan adalah sebesar \$410,000 + \$990,000 = \$1,400,000. Keuntungan yang diperoleh dengan melakukan *crashing* ini lebih besar \$20,000 jika dibandingkan dengan keuntungan yang diperoleh pada kondisi normal (yaitu sebesar \$1,380,000). Dengan demikian pengerjaan proyek dengan melakukan *crashing* lebih baik dari pada kondisi normal, karena perusahaan memperoleh keuntungan yang lebih tinggi lagi.

4. Kesimpulan

Pada paper ini, penulis membahas tentang metode jalur kritis dan pendekatan program linier dalam menyelesaikan masalah manajemen suatu proyek dengan kasus proyek yang ada pada referensi [5]. Metode jalur kritis dan pendekatan program linier ini memberikan hasil yang sama untuk jalur kritis pada kondisi normal (tidak ada penundaan pada setiap kegiatan proyek) dan keputusan *crashing*.

Dari permasalahan yang dibahas dapat disimpulkan bahwa pengerjaan proyek dengan melakukan *crashing* lebih baik dari pada kondisi normal, karena dengan melakukan *crashing* perusahaan memperoleh keuntungan yang lebih besar.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Susila Bahri, Bapak Efendi, M. Si dan Bapak Bukti Ginting, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Aminudin. 2005. *Prinsip-prinsip Riset Operasi*. Erlangga, Jakarta.
- [2] J Arifudin, Riza. 2012. *Optimasi Penjadwalan Proyek dengan Penyeimbangan Biaya Menggunakan Kombinasi CPM dan Algoritma Genetika*. Jurnal Masyarakat Informatika.4.2 : 1 – 14.
- [3] Hillier, S. Frederick, Gerald J. Lieberman. 2015. *Introduction to Operations Research. Tenth Edition*. McGraw-Hill Education, New York.
- [4] Khalaf, S. Wakas dan Leong Wah June. 2009. *A Linear Programming Approach for the Project Controlling*. Research Journal of Applied Sciences.4.5: 202 – 212.
- [5] Moder, J. Joseph,et.al. 1983. *Project Management with CPM, PERT and Precedence Diagramming. Third Edition*. Van Nostrand Reinhold, New York.