Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **2** Hal. 195 – 200
Edisi Agustus 2019
ISSN : 2303–291X

KRITERIA KEPOSITIFAN SISTEM DESKRIPTOR LINIER KONTINU

HARDES SWASTIKA
Program Studi S2 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : swastika.tanjung@yahoo.com

Diterima 22 Juni 2019 Direvisi 6 Juli 2019 Dipublikasikan 4 Agustus 2019

Abstrak. Dalam tulisan ini akan dikaji syarat perlu dan syarat cukup untuk memeriksa kepositifan sistem deskriptor linier kontinu. Algoritma *Shuffle* diaplikasikan untuk mentransformasi persamaan keadaan menjadi bentuk yang ekivalen sedemikian sehingga syarat perlu dan syarat cukup dapat dibentuk. Beberapa contoh disajikan untuk mengilustrasikan masalah utama.

Kata Kunci: Deskriptor, Sistem Linier, Waktu Kontinu, Kepositifan, Algoritma *Shuffle*

1. Pendahuluan

Secara umum, solusi sistem deskriptor linier kontinu dikatakan positif jika $\mathbf{x}(t)$ dan $\mathbf{y}(t)$ adalah non-negatif. Sistem deskriptor linier dengan solusi non-negatif sering digunakan dalam aplikasi, terutama dalam pemodelan matematika untuk masalah biologi, elektro, ekonomi dan lain sebagainya. Oleh karena itu, kajian tentang kepositifan solusi sistem deskriptor linier kontinu menarik untuk dilakukan. Beberapa penulis yang telah mengkaji kepositifan sistem deskriptor linier kontinu antara lain adalah Virnik [1], T. Kaczorek [5], D.G Luenberger [6], dan Bru R [7]. Penentuan kepositifan sistem deskriptor linier kontinu yang masih dalam bentuk umum terkadang sulit untuk dibentuk. Sistem deskriptor linier kontinu perlu ditansformasi menjadi bentuk yang lebih sederhana namun tetap ekivalen. Penelitian ini menggunakan Algoritma *Shuffle* dalam menjawab masalah tersebut sedemikian sehingga penentuan syarat perlu dan syarat cukup untuk memeriksa kepositifan sistem deskriptor linier kontinu dapat dibentuk.

2. Sistem Deskriptor Linier Kontinu

Sistem deskriptor linier kontinu ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

dimana $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$. Dalam sistem (2.1), $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaaan, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ menyatakan vektor *input* (kontrol), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ menyatakan vektor *output*, $A,\ E \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, dan $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Untuk definisi notasi, lihat [4].

Definisi 2.1. [4] *Sistem* (2.1) *dikatakan positif jika untuk setiap syarat awal konsisten non-negatif* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n_+$ *dan setiap input non-negatif* $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m_+$ *sedemikian sehingga* $\mathbf{u}^{(k)}(t) = \frac{d^k\mathbf{u}(t)}{dt^k} \in \mathbb{R}^m_+,\ k = 1, 2, \cdots, (q-1)$ *berlaku* $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n_+$*, dan* $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p_+$ *untuk* $t > 0$*, dimana* q *adalah indeks pasangan matriks* (E, A).

Definisi 2.2. [3] *Suatu matriks bujursangkar* A *dikatakan matriks Metzler jika* $a_{ij} \geq 0,\ \forall\ i \neq j$. *Himpunan matriks Metzler berukuran* $n \times n$ *ditulis* $\mathcal{M}^{n\times n}$.

Teorema 2.3. [3] *Misalkan* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Maka* $e^{At} \geq 0$ *untuk* $t \geq 0$ *jika dan hanya jika* A *adalah matriks Metzler.*

3. Transformasi Sistem Deskriptor Menggunakan Algoritma *Shuffle*

Algoritma *Shuffle* merupakan suatu metode untuk menyelesaikan suatu sistem deskriptor (2.1) dengan memanfaatkan rangkaian operasi baris elementer (OBE), lihat [4]. Cara kerja Algoritma *Shuffle* adalah dengan menyusun sistem (2.1) dalam array berikut

$$E\ A\ B. \tag{3.1}$$

Jika E adalah singular, maka lakukan operasi baris elementer sedemikian sehingga diperoleh array berikut:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2. \end{array} \tag{3.2}$$

Dari array (3.2) diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} E_1\dot{\mathbf{x}}(t) &= A_1\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{u}(t) \\ 0 &= A_2\mathbf{x}(t) + B_2\mathbf{u}(t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Turunkan persamaan kedua pada (3.3) terhadap t, diperoleh:

$$A_2\dot{\mathbf{x}}(t) = -B_2\dot{\mathbf{u}}(t). \tag{3.4}$$

Persamaan (3.3) dan (3.4) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \tag{3.5}$$

yang dapat disusun dalam array berikut:

$$\begin{array}{cccc} E_1 & A_1 & B_1 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & -B_2. \end{array} \tag{3.6}$$

Jika matriks $\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ pada (3.5) adalah non-singular maka proses dihentikan, dan solusi (2.1) dapat ditentukan dari persamaan diferensial berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \right). \tag{3.7}$$

Namun, jika matriks $\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ adalah matriks singular, lakukan operasi baris elementer pada (3.6) sedemikian sehingga diperoleh array

$$\begin{matrix} E_2 & A_3 & B_3 & C_1 \\ 0 & A_4 & B_4 & C_2. \end{matrix} \tag{3.8}$$

Dari (3.8) diperoleh sistem persamaan

$$\begin{aligned} E_2\dot{\mathbf{x}}(t) &= A_3\mathbf{x}(t) + B_3\mathbf{u}(t) + C_1\dot{\mathbf{u}}(t) \\ 0 &= A_4\mathbf{x}(t) + B_4\mathbf{u}(t) + C_2\dot{\mathbf{u}}(t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Turunkan persamaan kedua pada (3.9) terhadap t, diperoleh:

$$A_4\dot{\mathbf{x}}(t) = -B_4\dot{\mathbf{u}}(t) - C_2\ddot{\mathbf{u}}(t). \tag{3.10}$$

Dengan cara yang sama, persamaan (3.9) dan (3.10) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} E_2 \\ A_4 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} B_3 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} C_1 \\ -B_4 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \tag{3.11}$$

yang dapat disusun dalam array

$$\begin{matrix} E_2 & A_3 & B_3 & C_1 & 0 \\ A_4 & 0 & 0 & -B_4 & -C_2. \end{matrix} \tag{3.12}$$

Jika matriks $\begin{bmatrix} E_2 \\ A_4 \end{bmatrix}$ adalah matriks non-singular maka proses dihentikan, dan diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} E_2 \\ A_4 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} B_3 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} C_1 \\ -B_4 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -C_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \right) \tag{3.13}$$

Jika matriks $\begin{bmatrix} E_2 \\ A_4 \end{bmatrix}$ adalah matriks singular, maka proses diteruskan dengan mengikuti cara yang serupa. Namun, jika pada langkah ke $(q-1)$ diperoleh matriks non-singular, maka solusi sistem (2.1) dapat ditentukan dari persamaan differensial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} A_q \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} B_q \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} C_q \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ -H_q \end{bmatrix} \mathbf{u}^{q-1}(t) \right) \tag{3.14}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \bar{A}\mathbf{x}(t) + \bar{B}_0\mathbf{u}(t) + \bar{B}_1\dot{\mathbf{u}}(t) + \cdots + \bar{B}_{q-1}\mathbf{u}^{(q-1)}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\bar{A} \quad = \begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_q \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_0 = \begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_q \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots,$$

dimana

$$\bar{B}_{q-1} = \begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -H_q \end{bmatrix}, \mathbf{u}^k(t) = \frac{d^k \mathbf{u}(t)}{dt^k}, k = 0, 1, 2, \cdots, (q-1).$$

4. Kriteria Kepositifan Sistem Deskriptor Linier Kontinu

Teorema 4.1. [4] *Sistem deskriptor linier kontinu* (3.15) *adalah positif jika dan hanya jika*

$$\bar{A} \in \mathcal{M}^n, \bar{B}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \text{ untuk } k = 0, 1, \cdots, q-1, \text{ dan } C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}. \tag{4.1}$$

Bukti. ($\Longrightarrow$) Misalkan sistem (3.15) adalah positif. Akan dibuktikan bahwa $\bar{A} \in \mathcal{M}^n$, $\bar{B}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, untuk $k = 0, 1, \cdots, (q-1)$, dan $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$. Karena (3.15) adalah positif maka untuk setiap syarat awal non-negatif $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^n$ dan untuk setiap input $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}_+^m$ sedemikian sehingga $\mathbf{u}^{(k)}(t) = \frac{d^k \mathbf{u}(t)}{dt^k} \in \mathbb{R}_+^m$, $k = 1, 2, \cdots, (q-1)$, berlaku $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^n$, dan $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}_+^p$ untuk $t > 0$, dimana q adalah indeks pasangan matriks (E, A).

Misalkan $\mathbf{u}^{(k)}(t) = 0$, untuk $k = 0, 1, \cdots, (q-1)$ dan $t > 0$, maka sistem (3.15) menjadi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{A}\mathbf{x}(t). \tag{4.2}$$

Solusi (4.2) adalah

$$\mathbf{x}(t) = e^{\bar{A}t}\mathbf{x}_0. \tag{4.3}$$

Karena (3.15) adalah positif, maka Teorema 2.3 mengakibatkan bahwa $\bar{A}$ adalah matriks Metzler, yaitu $\bar{A} \in \mathcal{M}^n$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\bar{B}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, untuk $k = 0, 1, \cdots, (q-1)$. Perhatikan kembali sistem (3.15). Solusi (3.15) adalah

$$\mathbf{x}(t) = e^{\bar{A}s}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \left[\bar{B}_0\mathbf{u}(s) + \bar{B}_1\dot{\mathbf{u}}(s) + \cdots + \bar{B}_{q-1}\mathbf{u}^{(q-1)}(s)\right] ds \tag{4.4}$$

Karena sistem (3.15) adalah positif, maka $\mathbf{x}(t)$ adalah positif. Akibatnya, untuk $\mathbf{x}_0 = 0$, kepositifan $\mathbf{x}(t)$ mengakibatkan $\bar{B}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, untuk $k = 0, 1, \cdots, (q-1)$. Terakhir, akan ditunjukkan bahwa $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$. Perhatikan persamaan kedua pada (3.15). Karena $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^n$ dan $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}_+^p$ maka haruslah $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$.

($\Longleftarrow$) Misalkan $\bar{A} \in \mathcal{M}^n, \bar{B}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, untuk $k = 0, 1, \cdots, (q-1)$, dan $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$. Akan ditunjukkan bahwa sistem (3.15) adalah positif, yaitu dengan menunjukkan $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^m$, dan $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}_+^p$, untuk $t > 0$, untuk setiap syarat awal non-negatif $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^n$, dan untuk setiap input $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}_+^m$, dengan $\mathbf{u}^{(k)}(t) = \frac{d^k \mathbf{u}(t)}{dt^k} \in \mathbb{R}_+^m$, $k = 1, 2, \cdots, (q-1)$.

Andaikan $\mathbf{x}(t) \notin \mathbb{R}_+^n$, maka untuk $\mathbf{u}(t) = 0$, $t > 0$, dan $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^n$, sistem (1.16) menjadi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{A}\mathbf{x}(t). \tag{4.5}$$

Karena $\bar{A} \in \mathcal{M}^n$, maka berdasarkan Teorema 2.3, solusi (4.5) yaitu

$$\mathbf{x}(t) = e^{\bar{A}t}\mathbf{x}_0, \tag{4.6}$$

adalah non-negatif. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian bahwa $\mathbf{x}(t) \notin \mathbb{R}^m_+$. Jadi, haruslah $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n_+$. Selanjutnya, karena $C \in \mathbb{R}^{p\times n}_+$, maka $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p_+$. □

Akibat 4.2. [4] *Sistem deskriptor linier kontinu* (3.15) *positif jika dan hanya jika*

$$\begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_q \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}^n, \begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_q \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}_+,$$

$$\dots, \begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -H_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}_+. \tag{4.7}$$

Bukti. Karena solusi dari sistem (2.1) adalah juga merupakan solusi dari (3.15), maka berdasarkan Teorema 2.3 disimpulkan bahwa sistem (2.1) adalah positif jika dan hanya jika (4.2) dipenuhi. □

5. Contoh

Diberikan sistem deskriptor linier kontinu berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{5.1}$$

Array $E\ A\ B$ untuk sistem (5.1) adalah

$$\begin{array}{ccc|ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{5.2}$$

Dengan melakukan proses Algoritma *Shuffle* diperoleh

$$\begin{array}{ccc|ccc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0. \end{array} \tag{5.3}$$

Karena matriks

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

adalah nonsingular maka proses Algoritma *Shuffle* dihentikan. Dengan demikian, diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \tag{5.5}$$

Sistem deskriptor linier kontinu (5.5) adalah positif, karena

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Sementara itu, matriks

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

dan

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

adalah matriks non-negatif.

6. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Muhafzan, Bapak Dr. Dodi Devianto, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, dan Ibu Dr. Yanita yang telah memberikan masukan dan saran sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bru, R. 2002. Structural Properties of Positive Linear Time Invariant Difference Algebraic Equations. *Linear Algebra Application*. Vol.3, No.4: 1 – 10

[2] Kaczorek, T. 1991. *Linear Control System*. Vol.1. Research Studies Press LTD, England.

[3] Kaczorek, T. 2002. *Positive 1D and 2D Systems*. Springer-Verlag, London.

[4] Kaczorek, T. 2011. Checking of The Positivity of Descriptor Linear Systems by the Use of the Shuffle Algorithm. *Archives of Control Sciences*. Vol. **21**, No.3: 287 – 298

[5] Kaczorek, T. 2012. Positivity of Descriptor Linear Systems with Regular Pencils. *Archives of Electrical Engineering*. Vol. **61**, No.1: 101 – 113

[6] Luenberger, David G. 1978. *Time Invariant Descriptor Systems*. Vol. **14**, No.5: 473 – 480

[7] Virnik, E. 2008. Stability Analysis of Positive Descriptor Systems. *Linear Algebra and its Applications*. Vol. **429**, No.1: 2640 – 2659.