Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **3** Hal. 25 – 30
Edisi Desember 2019
ISSN : 2303–291X

PELABELAN TOTAL SISI ANTI AJAIB SUPER PADA GRAF KUBIK $C_{n,2n,2n,2n,n}$

DEBI ZULKARNAIN, LYRA YULIANTI, NARWEN
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : Debi.zal96@gmail.com

Diterima 14 Oktober 2019 Direvisi 21 Oktober 2019 Dipublikasikan 3 Desember 2019

Abstrak. Suatu pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib pada graf G dengan p merupakan banyak titik pada graf G dan q merupakan banyak sisi pada graf G adalah suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, p + q\}$ dikatakan pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib pada graf G jika himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G, yang dinotasikan dengan $W = \{w(xy)|w(xy) = f(x) + f(y) + f(xy), \forall xy \in E(G)\}$. f dikatakan sebuah pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super dari graf G jika $f(V) = \{1, 2, \cdots, p\}$ dan $f(E) = \{p + 1, p + 2, \cdots, p + q\}$. Graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ merupakan suatu graf kubik yang terdiri dari lima buah graf lingkaran yaitu graf C^1_n, C^2_{2n}, C^3_{2n}, C^4_{2n}, dan C^5_n dengan $n \geq 3$. Graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ tidak memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super untuk a dan d sebarang.

Kata Kunci: Pelabelan total sisi anti ajaib super, Fungsi bijektif, Graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$

1. Pendahuluan

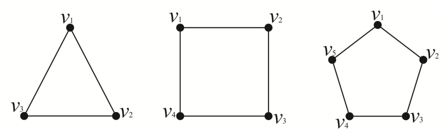
Teori graf adalah salah satu bagian dari ilmu matematika yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Banyak cabang dalam teori graf salah satunya adalah pelabelan. Pelabelan merupakan suatu pemetaan bijeksi yang memetakan unsur himpunan titik dan unsur himpunan sisi ke bilangan bulat bulat positif yang disebut label. Dalam [3] pelabelan yang banyak dibahas adalah pelabelan titik *(vertex labeling)*, pelabelan sisi *(edge labeling)*, dan pelabelan total *(total labeling)*.

Dalam [1] pelabelan graf diperkenalkan juga pelabelan ajaib dan pelabelan anti ajaib dimana pelabelan ajaib diperkenalkan oleh Sedlacek dan pelabelan anti ajaib diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel. Dalam pelabelan terdapat pelabelan (a, d) anti ajaib, yaitu pelabelan dengan himpunan bobot titik/bobot sisi yang membentuk barisan aritmatika dengan nilai awal a dan nilai beda d. Dalam tulisan ini akan dibuat suatu graf baru yang dibentuk dari lima buah graf lingkaran, sehingga membentuk suatu graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$ dengan $n \geq 3$.

2. Landasan Teori

Suatu graf G dinyatakan sebagai pasangan terurut himpunan (V, E), dimana V adalah himpunan tidak kosong yang anggota-anggotanya dinamakan titik (*vertex*), dan disebut himpunan titik(*vertices*). Sementara E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik. Umumnya himpunan titik dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dari graf G dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya titik pada graf G adalah $|V(G)|$ dan banyaknya sisi pada graf G adalah $|E(G)|$. Jika banyaknya titik dan sisi dari graf G adalah p dan q maka dapat ditulis $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$ [1].

Graf yang mempunyai banyaknya titik dan sisi yang berhingga disebut graf hingga. Derajat (*degree*) adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v, derajat sebuah titik v pada graf G, dituliskan dengan $deg(v)$. Suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan *graf reguler* bila setiap titik pada graf G memiliki derajat yang sama [2]. Selanjutnya, suatu graf G dikatakan graf terhubung *(connected graph)* jika untuk setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v, jika tidak demikian maka graf G disebut graf tidak terhubung [2]. Graf lingkaran *(cycle graph)* adalah graf terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n, untuk $n \geq 3$. Panjang dari C_n adalah banyak sisi yang terdapat di C_n yaitu sebanyak n [2]. Berikut pada Gambar 1 diberikan contoh graf lingkaran.

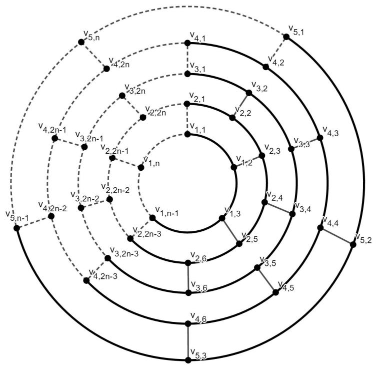


Gambar 1. Graf Lingkaran $C_n, 3 \leq n \leq 5$

Graf Kubik adalah suatu graf terhubung yang setiap titiknya berderajat tiga, sehingga graf kubik disebut juga dengan *graf reguler*, dimana setiap titik pada graf kubik memiliki derajat yang sama. Selanjutnya, diberikan graf lingkaran dengan n titik yang ditulis sebagai C_n, dengan $n \geq 3$. Kemudian dibentuk graf kubik yang terdiri dari lima buah graf lingkaran yaitu graf C_n^1, C_{2n}^2, C_{2n}^3, C_{2n}^4, dan C_n^5 dengan $n \geq 3$. Berikut Gambar 2 adalah graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ dengan $n \geq 3$.

Suatu pelabelan dari graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan bijeksi dari himpunan $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif $V = \{1, 2, ..., n\}$. Jika domain dari pemetaan adalah sisinya saja maka pelabelan tersebut adalah pelabelan sisi *(edge labeling)*. Jika domainnya adalah titiknya saja disebut pelabelan titik *(vertex labelling)*, dan jika domainnya adalah titik dan sisi maka disebut pelabelan total *(total labeling)* [1].

Jika suatu graf G memiliki bobot sisi atau bobot titik yang sama, maka pelabelan pada graf G disebut pelabelan total ajaib. Jika suatu graf G memiliki bobot sisi atau bobot titik yang semuanya berbeda, maka pelabelan pada graf G disebut pelabelan total anti ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan



Gambar 2. Graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$, $n \geq 3$.

bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika, dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib [1].

2.1. *Pelabelan Total (a, d) Sisi Anti Ajaib Super*

Berdasarkan [1], jika graf G dapat dilabeli dengan pelabelan anti ajaib maka G disebut graf anti ajaib. Misalkan suatu graf G memiliki banyak titik p dan banyak sisi q, sebuah fungsi bijeksi $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, p+q\}$ dikatakan pelabelan total (a, d) sisi anti ajaib pada graf G jika himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G, $W = \{w(xy)|w(xy) = f(x) + f(y) + f(xy), \forall xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W = \{a, a + d, \cdots, a + (q - 1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$ dengan suku pertama a dan beda d. Berdasarkan definisi bobot sisi yang sama pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib dari graf G dikatakan super jika $f(V) = \{1, 2, \cdots, p\}$ dan $f(E) = \{p + 1, p + 2, \cdots, p + q\}$ [5].

Pada [4], Simanjuntak dkk. menemukan bahwa untuk suatu graf dengan setiap titiknya berderajat ganjil tidak memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib untuk a dan d keduanya genap seperti pada teorema berikut.

Teorema 2.1. [4] *Suatu graf G dengan seluruh titiknya berderajat ganjil tidak memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib untuk a dan d keduanya genap.*

3. Pelabelan Total Sisi anti ajaib Super pada Graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$

Pada Teorema 3.1 berikut dinyatakan bahwa graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ akan memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super untuk $d \in \{0, 1, 2\}$.

Teorema 3.1. *Jika graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ untuk $n \geq 3$ memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super maka $d \in \{0, 1, 2\}$.*

Bukti. Misalkan G adalah graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ dengan $n \geq 3$. Banyak titik dan banyak sisi dari graf G adalah $|V(G)| = 8n$ dan $|E(G)| = 12n$. Berdasarkan banyak titik dan banyak sisi dari graf G tersebut dapat didefinisikan pelabelan sisi anti ajaib super pada graf G adalah $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, 20n\}$ dengan $f(V(G)) = \{1, 2, \cdots, 8n\}$ merupakan label titik pada graf G dan $f(E(G)) = \{8n + 1, 8n + 2, \cdots, 20n\}$ merupakan label sisi pada graf G. Selanjutnya akan ditentukan nilai beda dari bobot sisi d sehingga himpunan bobot sisi:

$$W = \{w(xy)|w(xy) = f(x) + f(y) + f(xy), xy \in E(G)\}$$

dapat dinyatakan sebagai suku-suku pada barisan aritmatika yang terbentuk dengan bobot sisi minimum a dan beda d, yaitu:

$$W = \{a, a + d, a + 2d, \cdots, a + (12n - 1)d\}.$$

Perhatikan bahwa, untuk bobot sisi minimum yang mungkin pada pelabelan f adalah

$$8n + 4 \leq a,$$

dan untuk bobot sisi maksimum yang mungkin pada pelabelan f adalah

$$a + (12n - 1)d \leq 36n - 1,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 8n + 4 + (12n - 1)d &\leq 36n - 1, \\ (12n - 1)d &\leq 36n - 1 - 8n - 4, \\ (12n - 1)d &\leq 28n - 5. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, untuk $n \geq 3$ berlaku

$$28n - 5 < 36n - 3,$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{28n - 5}{12n - 1} < \frac{36n - 3}{12n - 1}, \\ d &< 3. \end{aligned}$$

Sehingga, dapat diperoleh bahwa apabila graf G memiliki pelabelan total(a, d)-sisi anti ajaib super maka $d \in \{0, 1, 2\}$. □

Teorema 3.2 berikut didapatkan dari penjabaran Teorema 2.1, yaitu suatu graf $C_{n,2n,2n,2n,n}, n \geq 3$ dengan seluruh titiknya berderajat ganjil, $deg(v) = 3, \forall v \in V(C_{n,2n,2n,2n,n})$, dimana $deg(v)$ adalah derajat dari titik v tidak memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib untuk a dan d sebarang.

Teorema 3.2. *Misal terdapat graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$ dengan $n \geq 3$, n sebarang. Maka graf tersebut tidak memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib untuk a dan d sebarang.*

Bukti. Misalkan $p = 8n$ dan $q = 12n$ dimana p dan q masing-masing adalah banyak titik dan banyak sisi dari graf G. Andaikan graf G memiliki pelabelan total

(a, d)-sisi anti ajaib f. Berdasarkan pelabelan tersebut, maka jumlah semua bobot sisi dari graf G adalah

$$\sum_{uv\in E(G)} w(uv) = \sum_{i=0}^{12n-1} (a + id) = a12n + \frac{12n(12n-1)d}{2}. \tag{3.1}$$

Dalam perhitungan bobot sisi dari graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$, setiap label sisi digunakan satu kali dan label titik digunakan sebanyak tiga kali, karena titik pada graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$ memiliki derajat tiga. Jumlah dari semua label titik dan label sisi digunakan untuk menghitung bobot sisi yaitu

$$\sum_{j=1}^{20n} j + (3-1)\sum_{i=1}^{8n} f(v_i) = \frac{(20n)(20n+1)}{2} + 2(1+2+\cdots+8n). \tag{3.2}$$

Karena graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$ memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib maka akan diperoleh persamaan sebagai berikut

$$a12n + \frac{12n(12n-1)d}{2} = \frac{(20n)(20n+1)}{2} + 2(1+2+\cdots+8n),$$

atau

$$a + 6n(12n-1)d = \left(\frac{(20n)(20n+1)}{2} + 2(1+2+\cdots+8n)\right)\frac{1}{12n}. \tag{3.3}$$

Akan dibuktikan bahwa pengandaian graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$ memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib adalah salah, yaitu dengan menunjukkan bahwa Persamaan (3.3) tidak berlaku.

Berikut adalah penjabaran dari sisi kanan Persamaan (3.3)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(20n)(20n+1)}{2} + 2(1+2+\cdots+8n)\right)\frac{1}{12n}, n \geq 1\\
&= \left(\frac{(20n)(20n+1)}{2} + \frac{2(8n)(8n+1)}{2}\right)\frac{1}{12n}, n \geq 1\\
&= \left(\frac{400n^2 + 20n + 16n(8n+1)}{2}\right)\frac{1}{12n}, n \geq 1\\
&= \frac{528n^2 + 36n}{2}.\frac{1}{12n}, n \geq 1\\
&= \frac{528n^2 + 36n}{24n}, n \geq 1\\
&= 22n + \frac{3}{2}, n \geq 1. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (3.4) didapatkan bahwa sisi kanan dari Persamaan (3.3) tidak menghasilkan bilangan bulat untuk $n \geq 3$, n sebarang. Sehingga Persamaan tersebut tidak berlaku karena sisi kiri Persamaan (3.3) menghasilkan bilangan bulat untuk sebarang a dan d. Oleh karena itu, pengandaian bahwa graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$ dengan $n \geq 3$ memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib untuk a dan d sebarang adalah salah. $\square$

4. Kesimpulan

Suatu graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ dengan $n \geq 3$ adalah suatu graf kubik yang terdiri dari lima buah graf lingkaran yaitu graf C_n^1, C_{2n}^2, C_{2n}^3, C_{2n}^4, dan C_n^5 dengan $n \geq 3$, sehingga diperoleh bahwa graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ dengan $n \geq 3$ tidak memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib untuk a dan d sebarang. Oleh karena itu, graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ tidak memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super, dimana a dan d sebarang.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Dr. Haripamyu, bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy, dan bapak Dr. Mahdhivan Syafwan selaku dosen penguji tugas akhir yang telah memberikan masukkan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Baca, M dan Miller, M. 2008. *Super Edge-Antimagic Graph : A wealth of Problems and Some Solutions*. Brown Walker Press, USA.

[2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008), *Graph Theory*, Springer.

[3] Gallian, J.A. 2016.*A Dynamic Survey of Graph Labelling*. http//:www.combinatorics.org. Diakses pada 27 Februari 2019 Pukul 20.30.

[4] Simanjuntak R, Bertault F dan Miller M. 2000. *Two new (a, d)-antimagic graph labellings*. Proc. of Eleventh Australian Workshop of Combinatorial Algorithm.

[5] Sugeng.K.A. 2005. *Magic and Antimagic Labelling of Graph*. Disertasi S-3 Universitas Ballarat, Australia.